Exercices du 25 mars

Exercice 1 *On pose* $A=\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A.
2. *Déterminer une matrice* $P \in GL_3(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -0 & -8 \end{pmatrix}=D$.
3. *Déterminer* 9 *matrices de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *vérifiant* $M^3=A$.
4. *Soit* $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *On suppose que* $M^3=A$. *et on pose* $M'=P^{-1}MP$.
   (a) *Montrer que* $M'D=DM'$. *En déduire que* M' *est diagonale.*
   (b) *Que peut-on en déduire?*

Solution de l'exercice:

1. $\chi_A(x)=\begin{vmatrix} x+4 & -4 & 4 \\ 4 & x-4 & -4 \\ 8 & -8 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+8 & -4 & 4 \\ 0 & x-4 & -4 \\ x+8 & -8 & x \end{vmatrix}=(x+8)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & x+4 & -4 \\ 1 & -8 & x \end{vmatrix}=(x+8)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & x-4 & -4 \\ 0 & -4 & x-4 \end{vmatrix}$
   donc $\chi_A(x)=x(x-8)(x+8)$.
2. On trouve $E_0(A)=vect(U_1)$, $E_8(A)=vect(U_2)$ et $E_{-8}(A)=vect(U_3)$ avec
   $U_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $U_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   donc si $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -0 & -8 \end{pmatrix}=D$
3. Posons $\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon_2 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_i \in \mathbb{U}_3=\{1,j,j^2\}$. On a $(2\varepsilon_i)^3=8$ donc $(\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^3=D$.
   Posons $M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=P\ \Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}P^{-1}$. On a $(M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^3=\left(P\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}P^{-1}\right)^3=P(\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})^3P^{-1}=PDP^{-1}=A$.
   Il y a 3 possibilités pour ε_1 et 3 donc 9 possibilités pour $\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ donc pour $M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$
4. Réciproquement
   Si $M^3=A$ alors $MA=M^4=AM$
   $MA=AM \Leftrightarrow P^{-1}MAP=P^{-1}AMP \Leftrightarrow \left(P^{-1}MP\right)\left(P^{-1}AP\right)=\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}MP\right) \Leftrightarrow M'D=DM'$.
   Si $M'=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -0 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 8d & -8g \\ 0 & 8e & -8h \\ 0 & 8f & -8i \end{pmatrix}$ alors $DM'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8b & 8e & 8h \\ -8c & -8f & -8i \end{pmatrix}$ et
   $M'D=\begin{pmatrix} 0 & 8d & -8g \\ 0 & 8e & -8h \\ 0 & 8f & -8i \end{pmatrix}$.

donc $M'D=DM' \Leftrightarrow d=g=b=c=0$ et $8f=-8f$ et $8i=-8i \Leftrightarrow M'$ diagonale.

Or $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^3 \end{pmatrix}$ et $\beta^3=8 \Leftrightarrow \beta^3=2^3 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\beta}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{2}\in\mathbb{U}_3$. (idem pour γ) donc M' est une des matrice $\Delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ de la question précédente.

Exercice 2 *Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $|a|\neq|b|$ *et* $n\geq 2$. *On pose* $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & a & b \\ b & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & b \\ b & a & \cdots & b & a \end{pmatrix}_{2n}$.

1. *Montrer que A est diagonalisable.*

2. *Diagonaliser A.*

Solution de l'exercice:

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable

2. • (C_1, C_2) libre car $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0$ et
$C_{2k+1} = C_1$ et $C_{2k+2} = C_2$ donc $rg(A) = 2$. donc $\dim(\ker(A)) = 2n - 2$.
Soit f canoniquement associée à A et $(e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.
$C_{2k+1} = C_1$ donc $f(e_{2k+1} - e_1) = 0$
$C_{2k+2} = C_2$ donc $f(e_{2k+2} - e_2) = 0$
donc $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille de $2n-2$ vecteurs échelonnés de $\ker(A)$
donc libre donc base de $\ker(A) = E_0(A)$.
• $A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n(a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 = n(a+b) \neq 0$ car $|a| \neq |b|$
• Avec la trace, la dernière valeur propre est $\lambda_2 = n(a-b) \neq 0$.
En examinant la ligne 1 et $2k+1$ du système $AX = \lambda_2 X$, on obtient $x_1 = x_{2k+1}$
En examinant la ligne 2 et $2k+2$ du système $AX = \lambda_2 X$, on obtient $x_2 = x_{2k+2}$.
En injectant dans la première ligne, on obtient $x_2 = -x_1$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à λ_2.
Comme $\dim(E_0(A)) = 2n-2$, on a $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = \dim(E_{\lambda_2}(A)) = 1$.
On en déduit une base de vecteurs propres et une matrice P qui diagonalise A.

Exercice 3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B la matrice définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.*

1. *Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A.*

2. *On suppose que B est diagonalisable. Montrer que χ_A est scindé et $sp(A) \subset [0, +\infty[$.*

3. *Montrer que si $0 \in sp(A)$ alors B n'est pas diagonalisable.*

4. *Soit $\lambda \in sp(A)$. On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$. Montrer que $\dim(E_\mu(B)) = \dim(E_{-\mu}(B)) = \dim(E_\lambda(A))$*

5. *Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $sp(A) \subset]0, +\infty[$.*

Solution de l'exercice: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B la matrice définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. $\det(xI_{2n} - B) = \begin{vmatrix} xI_n & -I_n \\ -A & xI_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -I_n \\ -A + x^2 I_n & xI_n \end{vmatrix}$ $(C_i \leftarrow C_i + xC_{n+i}$ pour $1 \leq i \leq n)$
$\det(xI_{2n} - B) = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & I_n \\ x^2 I_n - A & -xI_n \end{vmatrix}$ $(C_i \leftarrow -C_i + xC_{n+i}$ pour $n+1 \leq i \leq 2n)$

$\det(xI_{2n}-B)=(-1)^n\times(-1)^n\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -xI_n & x^2I_n-A\end{vmatrix}$ $(C_i\leftrightarrow C_{n+i}$ pour $1\leq i\leq n)$

$\det(xI_{2n}-B)=\det(I_n)\det\left(x^2I_n-A\right)$ (déterminant triangulaire par blocs) donc $\chi_B(x)=\chi_A\left(x^2\right)$.

2. Soit $\lambda=|\lambda|e^{i\theta}$ une racine complexe de χ_A. On a $\chi_B\left(\sqrt{|\lambda|}e^{i\theta/2}\right)=\chi_A(\lambda)=0$ donc $\mu=\sqrt{|\lambda|}e^{i\theta/2}$ est une racine complexe de χ_B. Or B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc χ_B est scindé dans $\mathbb{R}$ donc $\mu\in\mathbb{R}$ donc $\lambda\in\mathbb{R}_+$. Toute racine complexe de χ_A est réelle donc χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$.

3. Supposons $0\in sp(A)$. Le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A=X^\alpha\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. On en déduit $\chi_B=X^{2\alpha}\prod_{i=1}^{k}\left(X^2-\lambda_i\right)^{\alpha_i}$ et donc $0\in sp(B)$ avec une multiplicité 2α.
Soit $(E_1,\dots E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(C_{i_1}(A),\dots,C_{i_r}(A))$ une base de l'espace engendré par les colonnes de A
La famille $\left(\begin{pmatrix} E_1 \\ 0_{n,1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} E_n \\ 0_{n,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ C_{i_1}(A)\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ C_{i_r}(A)\end{pmatrix}\right)$ est une base de l'espace engendré par les colonnes de B
donc $rg(B)=n+rg(A)$ donc par le théorème du rang, $\dim(E_0(B))=2n-rg(B)=n-rg(A)=\dim(E_0(A))\leq\alpha$ donc $\dim(E_0(B))<2\alpha$ donc B n'est pas diagonalisable.

4. Posons $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2\end{pmatrix}$ avec $X_i\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On a $BX=\begin{pmatrix} X_2 \\ AX_1\end{pmatrix}$ donc $BX=\mu X\Leftrightarrow\begin{pmatrix} X_2 \\ AX_1\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} X_2=\mu X_1 \\ AX_1=\mu^2X_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} X_1\in E_\lambda(A) \\ X_2=\mu X_1\end{cases}$.
Soit $k=\dim(E_\lambda(A))$ et $(U_1,\dots U_k)$ une base de $E_\lambda(A)$.
La famille $\left(\begin{pmatrix} U_1 \\ \mu U_1\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} U_k \\ \mu U_k\end{pmatrix}\right)$ est une base de k vecteur propre de B associés à μ donc et $\dim(E_\mu(B))=\dim(E_\lambda(A))$.
On obtient de même que $\dim(E_{-\mu}(B))=\dim(E_\lambda(A))$.

5. $(\Rightarrow)$ déjà vu.
Supposons A diagonalisable et $sp(A)\subset\,]0,+\infty[$.
$\sum_{\lambda\in sp(A)}\dim(E_\lambda(A))=n$ et $\lambda\neq0\Rightarrow\mu\neq-\mu$ donc $\dim(E_\mu(B))+\dim(E_{-\mu}(B))=2\dim(E_\lambda(A))$.
En sommant sur tout les λ dans $sp(A)$, on obtient que $\sum_{\gamma\in sp(B)}\dim(E_\gamma(B))\geq2\sum_{\lambda\in sp(A)}\dim(E_\lambda(A))=2n$ donc B est diagonalisable.