Mathématiques

Sujet de révision pour les écrits (chap 1,2,5,7,9,10,13)

Loi et covariance d'un couple discret (chap. 1,2,9,10,13)

Soit un entier $n \geqslant 3$.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On pose :

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_i=0)} \text{ et } Z_{n,2} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_i=1)},$$

où, pour tout événement A, on a noté $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de cet événement.

Q1. Donner les lois de Z_1 et de Z_2.

Q2. On pose $T_n = Z_1 + Z_2$.

(a) Donner la loi de T_n.

(b) En déduire la valeur de $\operatorname{cov}\big(Z_1, Z_2\big)$.
Les variables aléatoires Z_1 et Z_n sont-elles indépendantes ?

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n = k)$.

Q3. Montrer que la loi du couple (Z_1, Z_2) est donnée par :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \forall j \in [\![0, n-i]\!],\ P\big([Z_1 = i] \cap [Z_2 = j]\big) = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^{i+j}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-i-j}.$$

Q4. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f_n par :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f_n(s,t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} P([Z_1 = i \cap Z_2 = j])s^i t^j$$

(a) Calculer explicitement $f(s,t)$ en fonction de n, de s et de t.

(b) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(1,1)$ et retrouver la valeur de $\operatorname{cov}\big(Z_1, Z_2\big)$.

Moments factoriels pour la loi de Poisson (chap. 2,5,7,10)

Soit $(X_x)_{x\in\mathbb{R}_+^*}$ une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que, pour tout réel $x > 0$, X_x suit la loi de POISSON de paramètre x.

Q1. (a) Pour tout $x > 0$, déterminer l'espérance et la variance de X_x et de $Z_x = \dfrac{X_x}{x}$.

(b) On définit les polynômes :

$$H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ H_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = X(X-1)\cdots(X-k+1).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la variable aléatoire $Y_{x,k} = H_k(X_x)$ admet une espérance qui vaut $E(Y_{x,k}) = x^k$.

Q2. (a) Pour tout $x > 0$ et tout $r > 0$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^r}{n!}x^n$ converge.

On notera $S_r(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!}x^n$.

(b) Pour tout $x > 0$ et tout $r > 0$, montrer l'existence de $E((Z_x)^r)$ et l'exprimer à l'aide de $S_r(x)$.

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_N$ tels que

$$a_N = 1 \text{ et } \forall x > 0, \quad (X_x)^N = \sum_{k=0}^{N} a_k Y_{x,k}.$$

En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} E\left((Z_x)^N\right) = 1$.

Q3. (a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) = 0$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) = 1$.

Q4. Pour tout $r > 0$ et tout réel $x > 1$, montrer que :

$$\left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r P\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant E((Z_x)^r).$$

Q5. Soit $r > 0$. On pose $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$.

(a) Montrer que : $\forall t \geqslant 0, \quad t^s \leqslant s(t-1) + 1$.

(b) En déduire un majorant de $E((Z_x)^r)$ qui ne dépend que de s, $E((Z_x)^{N+1})$ et $E((Z_x)^N)$.

(c) En déduire que : $S_r(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$.

MATHÉMATIQUES

Sujet de révision pour les écrits — indications

Q1. Reconnaître une loi usuelle. Vérifier que l'on sait la justifier précisément.

Q2. (a) Reconnaître une loi usuelle.

(b) Utilise la formule de variance d'une somme.
rappeler le lien entre indépendance et covariance.

(c) Se rappeller l'exemple foindamental de la loi de Poisson.

Q3. Pas facile : expliciter l'évènement $(Z_1 = i) \cap (Z_2 = j)$ à l'aide des familles d'évènements $(X_k = 0)$, $(X_k = 1)$ et $(X_k \geqslant 2)$.
Si l'on n'y arrive pas on peut sauter la questrion car le résulta est fourni.

Q4. Utiliser le théorème de transfert pour un couple.

Q5. Faire le calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(1,1)$ de deux manières différentes.

Q1. (a) Il faut connaître l'espérance et la variances des loi usuelles, et penser à utiliser les propriétés algébriques de l'espérance et de la variance.

(b) Par théorème de transfert, on se ramène à un problème convergence et de somme de série.
Utiliser un DSE usuel.

Q2. (a) utiliser une méthode qui permet de montrer qu'une série converge sans calculer sa somme (comparaison, d'Alembert,etc.)

(b) Par théorème de transfert, on se ramène à la question prédédente.

(c) Remarquer que la famille $(H_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ est échelponnée en degrés...

Q3. (a) Utiliser une inégalité probaliste classique.

(b) Par théorème d'encadrement.

Q4. Utiliser une inégalité probaliste classique.

Q5. Utiliser un argument de convexité.

Q6. Utiliser une propriété analytique de l'espérance.

Q7. Question de synthèse.

Mathématiques

Sujet de révision pour les écrits — corrigé

Solution de l'exercice 1

Q1. La variable Z_1 compte le nombre d'évènements $(X_i = 0)$ réalisés ; ces évènements sont indépendants de probabilité $\frac{1}{,}n$. Donc Z_1 suit la loi binomiale $\boxed{\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right).}$

De même, on obtient : $\boxed{Z_2 \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right).}$

Q2. (a) La variable T_n compte le nombre d'évènements $(0 \leqslant X_i \leqslant 1)$ réalisés ; ces évènements sont indépendants de même probabilité $\frac{2}{,}n$. Donc $\boxed{T_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{n}\right).}$

(b) On utilise alors la formule suivante : $V(Z_1 + Z_2) = V(Z_1) + V(Z_2) + 2\mathrm{cov}(Z_1, Z_2)$.
Or : $V(Z_1 + Z_2) = n \times \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $V(Z_1) = V(Z_2) = n \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
Donc, après calcul, on a : $\boxed{\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) = -\frac{1}{n}.}$
Comme la covariance n'est pas nulle, $\boxed{\text{les variables ne sont pas indépendantes.}}$

(c) On a vu en cours que si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k) \text{ avec } Y \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Donc, en refaisant comme dans le cours, on obtient ici : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = \frac{\mathrm{e}^{-2}2^k}{k!}.}$

Q3. Soit i et j deux entiers naturels appartenant à $[\![0, n]\!]$ avec $j \leqslant n - i$.
L'évemement $[Z_1 = i] \cap [Z_2 = j]$ est réalisé si et seulement si parmi les variables $X_1, \dots, X_n$, i d'entres prennent la valeur 0, j autres d'entre elles prennent la valeur 1 et les $n - j - i$ restantes prennent une valeur supérieure ou égale à 2. Si on note :

$$\mathcal{P}(i,j) = \left\{(I, J, K) \in [\![1, n]\!]^3 \;\middle|\; I \cup J \cup K = [\![1, n]\!],\ I, J, K \text{ disjoints et } |I| = i,\ |J| = j\right\},$$

on a donc :

$$P\big([Z_1 = i] \cap [Z_2 = j]\big)$$

$$P = \left(\bigcup_{(I,J,K)\in\mathcal{P}(i,j)} \left(\bigcap_{r\in I}(X_r = 0)\right) \cap \left(\bigcap_{s\in J}(X_s = 1)\right) \cap \left(\bigcap_{t\in K}(X_t \geqslant 2)\right)\right)$$

$$= \sum_{(I,J,K)\in\mathcal{P}(i,j)} P\left(\left(\bigcap_{r\in I}(X_r = 0)\right) \cap \left(\bigcap_{s\in J}(X_s = 1)\right) \cap \left(\bigcap_{t\in K}(X_t \geqslant 2)\right)\right) \quad \text{(incomptabilité)}$$

$$= \sum_{(I,J,K)\in\mathcal{P}(i,j)} \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-i-j} \quad \text{par indépendance et loi des } X_i$$

$$= \boxed{\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^{i+}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-i-j}.}$$

Q4. (a) Par théorème de transfert pour un couple, on a :

$$\begin{aligned}
E\big(s^{Z_1}t^{Z_2}\big) &= \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} s^i t^j P\big([Z_1=i]\cap[Z_2=j]\big)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} s^i t^j \binom{n}{i}\left(\frac{1}{n}\right)^i \binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-i-j}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{s}{n}\right)^i\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}\left(\frac{t}{n}\right)^j\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-i-j}\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{s}{n}\right)^i\left(\frac{t}{n}+1-\frac{2}{n}\right)^{n-i} \qquad \text{(formule du binôme)}\\
&= \left(1+\frac{s+t-2}{n}\right)^n \qquad \text{(formule du binôme).}
\end{aligned}$$

(b) En partant de la définition de f, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i s^{i-1} j t^{j-1} P\big([Z_1=i]\cap[Z_2=j]\big).$$

Donc : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(1,1) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} ijP\big([Z_1=i]\cap[Z_2=j]\big) = E\big(Z_1Z_2\big)$, par thérorème de transfert pour un couple.

Par ailleurs On calcule donc $\partial_{1,2}f_n(1,1)$ à partir de l'expression $f_n(s,t) = \left(1+\dfrac{s+t-2}{n}\right)^n$:

$$\partial_{1,2}f_n(s,t) = \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{s+t-2}{n}\right)^{n-2} \Longrightarrow \partial_{1,2}f_n(1,1) = \frac{n-1}{n}.$$

On en déduit que : $E\big(Z_1Z_2\big) = \dfrac{n-1}{n}$.

Or par la formule de KOENIG-HUHGENS, on a : $\operatorname{cov}(Z_1,Z_2) = E\big(Z_1Z_2\big) - E\big(Z_1\big)E\big(Z_2\big)$.

En remplaçant, on retrouve bien : $\boxed{E\big(Z_1Z_2\big) = \dfrac{n-1}{n}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2 (EXTRAIT DE MINES-PONTS PC-PSI 2019, MODIFIÉ)

Q1. (a) D'après le cours $\boxed{E(X_x) = \mathbb{V}(X_x) = x.}$

On en déduit $\boxed{\mathbf{E}(Z_x) = 1}$ (linéarité de l'espérance) et $\boxed{\mathbf{V}(Z_x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{V}(X_x) = \frac{1}{x}.}$

(b) D'après le théorème de transfert et l'expression de la loi de POISSON :

$$\mathbf{E}(Y_{x,k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\mathbb{P}(X_x = n) = x^k e^{-x} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = x^k.$$

Q2. (a) Comme $n^r = \mathrm{o}(2^n)$, on a : $0 \leqslant \dfrac{n^r}{n!}x^n = \dfrac{n^r}{2^n} \times \dfrac{(2x)^n}{n!} = o\left(\dfrac{(2x)^n}{n!}\right)$,

d'où le résultat par $\boxed{\text{théorème de comparaison,}}$ puisque la série $\sum \dfrac{(2x)^n}{n!}$ converge.

Autre idée : par la règle de d'Alembert.

(b) D'après le théorème de transfert et la question précédente :

$$\mathbf{E}((Z_x)^r) = \mathbf{E}\left(\left(\frac{X_x}{x}\right)^r\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{x}\right)^r e^{-x}\frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{x^r}\sum_{n=0}^{+\infty} n^r \frac{x^n}{n!} = \boxed{\frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x).}$$

(c) Comme $\boxed{\text{la famille } (H_j)_{0 \leqslant j \leqslant N} \text{ est échelonnée en degré,}}$ c'est une base de $\mathbb{R}_N[X]$. Dans cette base on écrit $X^N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k H_k$; où le terme de degré N de la somme est $a_n X^n$, donc $a_N = 1$.

Ainsi, en substituant X par X_x, par linéarité de l'espérance, et d'après la question 1.b. on a :

$$E(Z_x^N) = \frac{1}{x^N}E(X_x^N) = \frac{1}{x^N}E\left(\sum_{k=0}^{N} a_k H_k(X_x)\right) = \frac{1}{x^N}\sum_{k=0}^{N} a_k E(Y_{x,k}) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^{k-N} \xrightarrow[x \to +\infty]{} a_N = 1.$$

Q3. (a) Comme Z_x admet une variance, $\boxed{\text{l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBICHEV}}$ donne, pour $\varepsilon = x^{-\frac{1}{3}}$:

$$\mathbb{P}\left(|Z_x - E(Z_x)| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \frac{V(Z_x)}{x^{-\frac{2}{3}}} \quad \text{et donc} \quad \mathbb{P}\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

(b) Comme $(Z_x < 1 - \varepsilon) \subset (|Z_x - 1| \geqslant \varepsilon)$, la croissance de P donne :

$$1 - P\left(|Z_x - 1| \geqslant x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant 1 - P\left(Z_x < 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) = P\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant 1.$$

Donc par théorème d'encadrement, avec **Q3.** a, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) = 1$.

Q4. Comme $x > 1$, $\boxed{\text{l'inégalité de MARKOV}}$ pour ${Z_x}^r$ (où $Z_x \geqslant 0$), avec $a = \left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r > 0$ donne :

$$\mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) = \mathbb{P}(Z_x^r \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}((Z_x)^r)}{a}, \text{ soit } \left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r \mathbb{P}\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant \mathbf{E}(Z_x^r).$$

Q5. (a) Comme $s \in [0,1[$, $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto t^s \text{ est concave,}}$ donc en dessous de sa tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = s(t-1)+1$.

(b) On en déduit $Z_x^s \leqslant s(Z_x - 1) + 1$, donc $Z_x^r \leqslant sZ_x^{N+1} + (1-s)Z_x^N$, donc :

$$E(Z_x^r) \leqslant sE(Z_x^{N+1}) + (1-s)E(Z_x^N).$$

(c) D'après **Q4.** et **Q5.** a, on a :

$$\left(1 - x^{-\frac{1}{3}}\right)^r P\left(Z_x \geqslant 1 - x^{-\frac{1}{3}}\right) \leqslant E((Z_x)^r) \leqslant sE(Z_x^{N+1}) + (1-s)E(Z_x^N).$$

Quand x tend vers $+\infty$, le minorant tend vers 1 (cf. **Q3.** b) et d'après la question 2c, le majorant tend vers $s + (1-s) = 1$. Donc par encadrement $E((Z_x)^r)$ tend vers 1, ce qui d'après **Q2.** b donne bien : $\boxed{S_r(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r e^x.}$