Mathématiques

Devoir surveillé n°7 **SUJET STANDARD**

Durée 4h – Calculatrices interdites

Les solutions devront être présentées **dans l'ordre de l'énoncé** *(quitte à laisser des blancs pour compléter plus tard), rédigées avec une* **encre foncée**. *Ce qui est écrit sur une page ne devra pas dépasser sur la page située à côté. Chaque fois que le résultat d'une question précédente sera utilisé (ce qui est possible même si la question n'a pas été traitée),* **le numéro de cette question devra être mentionné clairement.** *Les théorèmes utilisés devront être mentionnés explicitement et leurs hypothèses seront mentionnées, et, si nécessaire, vérifiées avec soin. Les solutions doivent être rédigées de manière claire, compréhensible et rigoureuse ; il en sera tenu le plus grand compte dans la notation finale.* **Les résultats seront encadrés.**

Problème A

PARTIE I

Soit $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ la série de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$.

Q1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On note $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Q2. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-telle normalement sur $\mathbb{R}$?

Q3. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

Q5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ v_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Montrer que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Q6. On note $V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.

Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

Q7. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ p_0(x) = x\,;$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},\ p_n(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de U.

Tournez la page SVP

PARTIE II

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par :

$$\text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ h(x,t) = \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}.$$

Q8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto h(x,t)$ admet, quand t tend vers 0 par valeurs positives, une limite finie que l'on déterminera.

Q9. Montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer ses dérivées $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$; on distinguera les cas n pair et n impair.

Q10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, montrer l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ des fonctions

$$t \mapsto h(x,t), \qquad t \mapsto \frac{t^n}{\exp(\pi t)-1} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \exp(-\pi t)\sin(tx).$$

Q11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,\mathrm{d}t.$$

Q12.

(a) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $\dfrac{1}{\exp(\pi t)-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t)$.

(b) Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\sin(tx)\mathrm{d}t$ à l'aide de $u_n(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on pose :

$$h_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \exp(-k\pi t)\sin(tx).$$

(c) Montrer que : $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) En déduire une expression simple de la fonction f à l'aide de la fonction U.

Problème B

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions.
Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une fonction f $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I – Deux exemples de fonctions $\mathcal{C}^\infty$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k(1-ikx)}$.

Q1. Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g^{(p)}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$.

Q2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\left|g^{(p)}(0)\right| \geqslant p^{2p}\mathrm{e}^{-p}$.

Q3. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-itx)}\, \mathrm{d}t$.

Q4. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

Q5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

Q6. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de Γ_p.

Q7. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(p)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$,.

Q8. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Tournez la page SVP

Partie II – Le théorème de Borel

Q9. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Q10. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{x-i}$.
Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Q11. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p-ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Q12. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| \leqslant 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}$.

Q13. Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}$.
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$: $|\alpha| \cdot \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}$.

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n!a_n^2 x^2}.$$

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, tout entier $n \geqslant p$ et tout réel x, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q15. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q16. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel x, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

Q17. En déduire que la fonction $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q18. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geqslant 1$, on a : $U^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p$.

Q19. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction f $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. *Il a été démontré par* Peano *et* Borel *à la fin du* XIX^e *siècle.*

FIN du DEVOIR