MATHÉMATIQUES

Corrigé du devoir surveillé n°7 SUJET STANDARD

SOLUTION DU PROBLÈME A (CCP PC 2011, ÉPREUVE 2, PARTIES I ET III)

Q1. Convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $\sum u_n$:

Pour tout x réel, on a :$|u_n(x)| \leqslant \frac{2|x|}{n^2\pi^2}$
Comme la série de RIEMANN $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, par $\boxed{\text{théorème de comparaisons pour les séries,}}$ la série $\sum u_n$ converge absolument, donc elle converge simplement sur $\mathbb{R}$

Q2. Convergence normale de $\sum u_n$:

Pour tout $x \in [-a,a]$, on a $\boxed{|u_n(x)| \leqslant \frac{2|x|}{n^2\pi^2} \leqslant \frac{2|a|}{n^2\pi^2},}$ où le majorant ne dépend pas de x.
Comme la série de RIEMANN $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge normalement sur } [-a,a].}$

On a : $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| \geqslant u_n(n) = \dfrac{2}{(1+\pi^2)\,n}$.
Puisque la série de terme général $\frac{2}{(1+\pi^2)n}$ diverge alors par théorème de comparaison la série $\sum \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ diverge *i.e.* $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}.}$
Autre méthode : l'étude des variations de u_n montre que : $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)| = |u_n(\pm n\pi)| = \dfrac{1}{n\pi}$.
Donc la série $\sum \sup\limits_{\mathbb{R}} |u_n|$ diverge (série harmonique).

Q3. Continuité de U sur $\mathbb{R}$:

Cela découle directement du $\boxed{\text{théorème de continuité sous le signe } \sum}$ puisque :

- les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$;
- $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de $[-a,a]$ de $\mathbb{R}$ (cf. **Q2.**)

Ainsi U est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}$.

Q4. Primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n :

$$\int_0^x \frac{2t}{t^2+n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t = \left[\ \ln\left|t^2+n^2\pi^2\right|\ \right]_0^x = \ln\left(x^2+\pi^2n^2\right) - \ln\left(\pi^2n^2\right) = \boxed{\ln\left(1+\tfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right).}$$

Q5. Convergence simple sur $\mathbb{R}$ de $\sum v_n$:

D'après l'équivalent $\boxed{\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u,}$ pour tout x réel, on a : $0 \leqslant v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{n^2\pi^2}$.
D'après la convergence de la série de RIEMANN $\sum \dfrac{1}{n^2}$, par $\boxed{\text{th. de comparaisons pour les séries,}}$ la série de terme général $v_n(x)$ est convergente *i.e.* la série $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Q6. La fonction V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U :

Cela découle directement d'un $\boxed{\text{théorème de dérivation terme à terme}}$ puisque :

- les fonctions v_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- la série $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$;
- la série $\sum v_n' = \sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $[-a, a]$.

Donc la fonction V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[-a, a]$, donc sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, V'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = U(x).$$

De plus $V(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(0) = 0$, donc $\boxed{V \text{ est la primitive de } U \text{ qui s'annule en } 0.}$

Q7. Convergence simple et limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$:

$\boxed{\text{Si } x = 0,}$ la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (suite nulle).

$\boxed{\text{Si } x \neq 0,}$ la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $\left(\dfrac{p_n(x)}{x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; comme cette dernière supérieure ou égale à 1 ; c'est encore équivalent à la convergence de la suite de terme général :

$$\ln\left(\frac{p_n(x)}{x}\right) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x).$$

Il y a bien convergence d'après la $\boxed{\text{convergence de la série } \sum v_n(x) \text{ (cf. } \mathbf{Q5})}$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = x\exp(V(x)) = x\exp\left(\int_0^x U(t)\ \mathrm{d}t\right).}$$

Q8. Limite de $h(x,t)$ quand $t \to 0^+$:

D'après les équivalences $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, comme $\lim\limits_{t\to 0} xt = 0$, pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{xt}{\pi t} = \frac{x}{\pi} \qquad \text{d'où } \boxed{\lim_{t\to 0^+} h(x,t) = \frac{x}{\pi}.}$$

Q9. Dérivabilité et dérivée partielle de h par rapport à x à tout ordre :

Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ (par composition) par une constante. Donc h possède des dérivées partielles par rapport à x à tout ordre et en tout point de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Par récurrence évidente sur $n \geqslant 0$ on a :

$$\boxed{\frac{\partial^n h}{\partial x^n} = \begin{cases} \dfrac{t^{2m}(-1)^m \sin(tx)}{\exp(\pi t) - 1} & \text{si } n = 2m \\[2ex] \dfrac{t^{2m+1}(-1)^m \cos(tx)}{\exp(\pi t) - 1} & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}}$$

Q10. Intégrabilités sur $]0, +\infty[$:

- les trois fonctions sont clairement $\boxed{\text{continue par morceaux sur }]0, +\infty[,}$ et même sur $[0, +\infty[$ pour la dernière.
- $\boxed{\text{En } 0,}$ $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable en $+\infty$ car prolongeable par continuité d'après **Q9.** ; et de même pour $t \mapsto \dfrac{t^n}{\exp(\pi t) - 1}$ car $\dfrac{t^n}{\exp(\pi t) - 1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^{n-1}}{\pi}$.

- $\boxed{\text{En } +\infty,}$ on a : $\boxed{|h(x,t)| \leqslant \dfrac{1}{\exp(\pi t)-1} \leqslant \exp(-\pi t)\,, |\exp(-\pi t)\sin(tx)| \leqslant \exp(-\pi t)\,,}$

  et $\left|\dfrac{t^n}{\exp(\pi t)-1}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \underbrace{t^n \mathrm{e}^{-\frac{pi}{2}t}}_{\mathrm{o}(1)} \mathrm{e}^{-\frac{pi}{2}t} = \boxed{\mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-\frac{pi}{2}t}\right),}$

  d'où l'intégrabilité en $+\infty$ par $\boxed{\text{théorème de comparaison}}$ car l'intégrabilité de $t \mapsto \exp(-\alpha t)$ est connue pour $\alpha > 0$.

Remarque : en $+\infty$ on peut aussi conclure par la règle de Riemann puisque $\exp(-\alpha t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Q11. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$:

Utilisons le $\boxed{\text{théorème de dérivation } n \text{ fois sous le signe } \int}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- pour tout t, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ d'après **Q9.** ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (cf. expression trouvée en **Q9.**) ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car continuité par morceaux et d'après la domination qui suit (en remplaçant n par p).
- *Domination* : $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \left|\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^n}{\exp(\pi t)-1} = \varphi(t)$
  avec φ qui ne dépend pas de x et est intégrable sur $]0,+\infty[$ (cf. **Q10.**)

Ainsi le théorème s'applique et donne que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \{1,...,n\}\,, f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Comme ceci est vrai pour tout n, la fonction $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}, f^{(2m)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}\sin(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,\mathrm{d}t \text{ et } f^{(2m+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}\cos(tx)}{\exp(\pi t)-1}\,\mathrm{d}t.}$$

Q12. (a) On reconnaît la somme d'une $\boxed{\text{série géométrique}}$ de raison $\boxed{q = \mathrm{e}^{-\pi t} \in]-1,1[,}$ car $t > 0$. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n\pi t) = \frac{\exp(-\pi t)}{1-\exp(-\pi t)} = \frac{\exp(\pi t)}{\exp(\pi t)} \times \frac{\exp(-\pi t)}{1-\exp(-\pi t)} = \frac{1}{\exp(\pi t)-1}.$$

(b)

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi t+\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-n\pi t+\mathrm{i}tx}}{-n\pi+\mathrm{i}x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = 0 - \frac{1}{-n\pi+\mathrm{i}x} \text{ car } \left|\mathrm{e}^{-n\pi t+\mathrm{i}tx}\right| = \mathrm{e}^{-n\pi t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

$$\text{d'où } \int_0^{+\infty} \exp(-n\pi t)\sin(tx)\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\pi t+\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{n\pi+\mathrm{i}x}{|n\pi-\mathrm{i}x|^2}\right)$$
$$= \frac{x}{(n\pi)^2+x^2} = \boxed{\frac{1}{2}u_n(x).}$$

(c) Appliquons le $\boxed{\text{théorème de convergence dominée}}$ avec la suite $(t \mapsto h_n(x,t))_{n\geqslant 1}$ (pour x fixé) :

- il est clair que, pour tout x, la fonction $t \mapsto h_n(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
- *(convergence simple)* : d'après **Q12a**, pour tout $t > 0$, on a $h_n(x,t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(x,t)$;

- il est clair que, pour tout x, la limite simple $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
- *(domination)* : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} h_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} [\exp(-\pi t)]^k \sin(tx) &= \exp(-\pi t) \frac{1-\exp(-n\pi t)}{1-\exp(-\pi t)} \sin(tx) \\ &= \underbrace{(1-\exp(-n\pi t))}_{\in[0,1]} \frac{\sin(tx)}{e^{\pi t}-1} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{|h_n(x,t)|} = (1-\exp(-n\pi t)) \left| \frac{\sin(xt)}{e^{\pi t}-1} \right| \boxed{\leqslant |h(x,t)|,}$

et d'après **Q10**, $\boxed{t \mapsto h(x,t) \text{ (qui ne dépend pas de } n\text{) est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$\boxed{f(x) = \int_0^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,\mathrm{d}t.}$$

(d) Par linéarité de l'intégration, puis avec **Q12b**, on a :

$$\int_0^{+\infty} h_n(x,t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \exp(-k\pi t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} u_k(x)$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}U(x).}$

Solution du problème B (CC-INP PSI, 2019, problème 1)

Q1. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ utilisons de $\boxed{\text{théorème de dérivation terme à terme } p \text{ fois d'une série de fonction}}$ avec la série de fonction de terme général $x \mapsto u_k(x) = \mathrm{e}^{-k(1-ikx)} = \mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^{ik^2x}$.

- Chaque fonction u_k est clairement $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } \mathbb{R}.}$
- pour tout $j \in [\![0,p]\!]$, on a $u_k^{(j)}(x) = (ik^2)^p\mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^{ik^2x}$. Donc $|u_k^{(j)}(x)| = k^{2p}\mathrm{e}^{-k}$.
  Or $k^{2p}\mathrm{e}^{-k}$ ne dépend de x et par croissances comparées, on a $k^{2p}\mathrm{e}^{-k} \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)$.
  Comme la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{k^2}$ converge, on en déduit que la série de fonction $\displaystyle\sum_k u_k^{(j)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$
  En particulier (pour se mettre exactement dans les hypothèses du cours) les séries $\displaystyle\sum_k u_k^{(j)}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ pour tout $j \in [\![0,p-1]\!]$ et $\boxed{\displaystyle\sum_k u_k^{(p)} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}.}$

Ainsi $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est de classe $\mathcal{C}^p$ et l'on a : $\boxed{\forall k,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(ik^2)^p\mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^{ik^2x}.}$

Ceci est vrai pour tout p, donc $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty.}$

Q2. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède,
$\left|g^{(p)}(0)\right| = \left|i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathrm{e}^{-k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathrm{e}^{-k}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathrm{e}^{-k}$,
car tous les termes de la somme sont positifs. Justement, puisqu'ils sont tous positifs, la somme est plus grande que chaque terme donc que le terme correspondant à $k = p$ par exemple. Ainsi,

$$\boxed{|g^{(p)}(0)| \geqslant p^{2p}\mathrm{e}^{-p}}$$

Q3. D'après la question précédente, et comme $p! \leqslant p^p$, on a :

$$\left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p\right| \geqslant \frac{p^{2p}\mathrm{e}^{-p}|x|^p}{p!} \geqslant (p|x|)^p\mathrm{e}^{-p} = \left(\frac{p|x|}{e}\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty \text{ si } x \neq 0.$$

Donc la série $\displaystyle\sum \frac{p^{2p}\mathrm{e}^{-p}}{p!}x^p$ diverge grossièrement pour tout $x \neq 0$, donc son rayon est $\boxed{S = 0.}$

Autre idée : d'après la question précédente, on a $\left|\frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right| \geqslant \dfrac{p^{2p}\mathrm{e}^{-p}}{p!}$.

Donc par $\boxed{\text{théorème de comparaison sur les séries entières}}$ le rayon R' de la série entière $\displaystyle\sum \frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est majoré par le rayon S la série entière $\displaystyle\sum \underbrace{\frac{p^{2p}\mathrm{e}^{-p}}{p!}}_{=u_p} x^p$.

Comme $u_p \neq 0$ on calcule S par la $\boxed{\text{règle de d'Alembert pour les séries entières}}$:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{(p+1)^{2p+1}}{p^{2p}} = \frac{1}{\mathrm{e}}(p+1)\frac{(p+1)^{2p}}{p^{2p}} = \frac{1}{\mathrm{e}}(p+1)\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

car classiquement, on a $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \mathrm{e}$ (puisque $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p = \mathrm{e}^{p\ln(1+1/p)}$ et $\ln(1+1/p) \sim 1/p$).

Donc $S = 0$. Ainsi $0 \leqslant R' \leqslant S = 0$ *i.e.* $\boxed{R' = 0.}$

La fonction g n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 :

Car si c'était la cas elle serait égale à la somme de sa série de Taylor au voisinage de 0.
Ce n'est pas le cas car on vient de voir que cette série de Taylor diverge en tout point (sauf 0), donc ne converge sur aucun voisinage de 0

Q4. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé la fonction $(x,t) \xmapsto{u} u(x,t) = \mathrm{e}^{-t(1-itx)}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus :

$$|u(x,t)| = |\mathrm{e}^{-t(1-itx)}| = |\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{it^2x}| = \mathrm{e}^{-t}.$$

Par ailleurs on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } f(x) \text{ converge absolument, donc converge.}}$

Q5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^p\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (il n'y a donc pas de problème d'existence de l'intégrale qu'en $+\infty$). Et par croissances comparées, on a :

$$t^2 \times t^p\mathrm{e}^{-t} = t^{p+2}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\boxed{t^p\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).}$ Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par $\boxed{\text{théorème de comparaison}}$ la fonction $t \mapsto t^p\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable. Donc $\boxed{\Gamma_p \text{ existe}}$.

Relation entre Γ_p et Γ_{p+1} :

On réalise sur Γ_p une $\boxed{\text{intégration par parties}}$ en posant : $\begin{array}{ll} u'(t) = t^p & u(t) = \frac{1}{p+1}t^{p+1} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} & v'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}$

u et v sont bien de classe C^1, $u'v$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $[uv]_0^{+\infty} = 0$ puisque $u(0) = 0$ $(p+1 > 0)$ et $uv \xrightarrow[+\infty]{} 0$ par croissances comparées. Ainsi :

$$\Gamma_p = \frac{1}{p+1}\int_0^{+\infty} t^{p+1}\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{1}{p+1}\Gamma_{p+1} \text{ donc } \boxed{\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p}$$

Remarque : on aussi montrer par récurrence sur $p \geqslant 0$ que Γ_p existe, où l'initialisation est le calcul de Γ_0 et l'hérédité est l'intégration par parties — ce qui évite d'avoir à utiliser un th. de comparaison.

Q6. On a : $\Gamma_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1.$

D'après la relation précédente, par récurrence facile (ou par calcul de produit), on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{\Gamma_p = p!}$.

Q7. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ montrons que f est de classe $\mathcal{C}^p$ à l'aide du $\boxed{\text{théorème de dérivation } p \text{ fois d'une intégrale à paramètre}}$ avec $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t(1-itx)}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x réel et tout $k \in [\![0,p]\!]$ la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) = (it^2)^k u(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
- Pour tous x réel et tout $t \geqslant 0$, on a : $\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\right| = \left|(it^2)^k u(x,t)\right| = t^{2k}\mathrm{e}^{-t}$, et $t \mapsto t^{2k}\mathrm{e}^{-t}$ ne dépend pas de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (d'après **Q5**).

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout k, on a : $\boxed{f^{(k)}(x) = i^k\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2k}\mathrm{e}^{-t(1-itx)}dt.}$

Comme ceci est vrai pour tout p, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q8. **Rayon de convergence :**

D'après **Q7** puis **Q6**, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{f^{(p)}(0)} = i^p\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}\mathrm{e}^{-t}dt = i^p\Gamma_{2p} = \boxed{i^p(2p)!}$,

Posons $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p(2p)!}{p!} \neq 0$. On utilise la règle de D'ALEMBERT pour les séries entières :

$$\frac{|a_{p+1}|}{|a_p|} = \frac{(2(p+1))!p!}{(2p)!(p+1)!} = 2(2p+1) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ est de rayon $\boxed{R = 0.}$

La fonction f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0. :

Même raisonnement qu'en **Q3**.

Q9. On met tout au même dénominateur et on voit que $\boxed{a = \frac{1}{2i} \text{ et } b = -\frac{1}{2i}}$ conviennent.

Q10. La fonction Ψ est bien définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque x est réel et ne prend donc jamais la valeur i. Montrons $\boxed{\text{par récurrence sur } p \geqslant 0}$ la relation :

$$H(p) :\ll \ \forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\Psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}} \gg$$

- **Initialisation** : pour $p = 0$, on doit montrer que pour tout x réel, $\Psi(x) = \frac{1}{x-i}$ ce qui n'est rien d'autre que la définition.
- **Hérédité** : soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $H(p)$ est vraie. Montrons que $H(p+1)$ l'est aussi. On sait donc que pour tout x réel, $\Psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}$. En dérivant cette égalité il vient $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi^{(p+1)}(x) = \frac{d}{dx}\frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}} = (-1)^p p! \frac{d}{dx}(x-i)^{-(p+1)} = -(p+1)(-1)^p p!(x-i)^{-(p+2)} = \frac{(-1)^{p+1}(p+1)!}{(x-i)^{p+2}}$$

donc $H(p+1)$ est vraie.

Q11. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après **Q9**, pour tout x réel,

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2i}\left(\Psi(x) - \overline{\Psi(x)}\right) \text{ donc } \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{1}{2i}\left(\Psi^{(p)}(x) - \overline{\Psi}^{(p)}(x)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}} - \frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}\right)$$

$$\boxed{\varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right)}$$

On a utilisé le fait que dériver puis conjuguer revient au même que conjuguer puis dériver.

Q12. ▶ Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Notons $z = (x+i)^{p+1}$. Alors

$$\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| = |z - \overline{z}| = |2i\mathrm{Im}(z)| = 2\,|\mathrm{Im}(z)| \leqslant 2|z| \text{ (inégalité bien connue)}$$

Mais $|z| = \left|(x+i)^{p+1}\right| = |x+i|^{p+1} = \sqrt{1+x^2}^{p+1} = \left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}$. On a donc

$$\boxed{\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| \leqslant 2\left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}$$

▶ On suppose désormais $x \neq 0$. Alors, d'après **Q11**,

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| = \left|\frac{(-1)^p p!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right)\right| = \frac{p!}{2}\left|\frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}}\right|$$

$$= \frac{p!}{2}\left|\frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x-i)^{p+1}(x+i)^{p+1}}\right| = \frac{p!}{2}\left|\frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(1+x^2)^{p+1}}\right| \leqslant \frac{p!}{2}\frac{2\left(1+x^2\right)^{\frac{p+1}{2}}}{(1+x^2)^{p+1}} = \frac{p!}{(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}}$$

Mais $1 + x^2 \geqslant x^2 \geqslant 0$ donc $(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}} \geqslant (x^2)^{\frac{p+1}{2}} = x^{p+1} > 0$ donc

$$\boxed{\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}}$$

Q13. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour x réel, $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$.
En dérivant p fois pour $p \in \mathbb{N}$, on a facilement $\varphi_\alpha^{(p)}(x) = \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)$ donc, si $x \neq 0$ et $\alpha \neq 0$,

$$\boxed{|\alpha|\left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right|} = |\alpha|\left|\alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)\right| = |\alpha|^{p+1}\left|\varphi_1^{(p)}(\alpha x)\right| \leqslant |\alpha|^{p+1}\frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \boxed{\frac{p!}{|x|^{p+1}}}$$

d'après **Q12** que l'on peut appliquer puisque $\alpha x \neq 0$.

Si $\alpha = 0$ cette inégalité reste vraie puisque le membre de gauche est nul et celui de droite est positif.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On remarque que pour x réel, $u_n(x) = a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x) = \theta(x)\varphi_{\alpha_n}(x)$ en notant $\theta : x \mapsto a_n x^n$.

θ et φ_{α_n} sont de classe C^∞ donc u_n aussi et par la $\boxed{\text{formule de Leibniz}}$, pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \theta^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$$

On suppose maintenant $p \leqslant n$. Alors si $k \in [\![0, p]\!]$, $k \leqslant n$ donc $\theta^{(k)}(x) = a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ d'où

$$\boxed{u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)}$$

Q15. ▶ Soient $n \geqslant 0$ et $p \in [\![0, n-1]\!]$. $p \leqslant n$ donc on peut appliquer la question précédente ce qui donne bien $\boxed{u_n^{(p)}(0) = 0}$ puisque dans la somme, $k \leqslant p < n$ donc $n - k > 0$ donc $0^{n-k} = 0$.

▶ Puis, pour $p = n$, tous les termes donnent 0 comme avant sauf le terme pour $k = p = n$ qui donne $a_n \binom{n}{n} \frac{n!}{0!} \varphi_{\alpha_n}(0) = a_n n!$. Ainsi, $\boxed{u_n^{(n)}(0) = n! a_n}$.

Q16. **[question assez technique]**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après **Q14** (que l'on peut appliquer puisque $p \leqslant n$) et la définition de α_n :

$$\left| u_n^{(p)}(x) \right| = \left| \frac{\alpha_n}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{\sqrt{n!}}{(n-k)!} |x|^{n-k} |\alpha_n| \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right|$$

D'après **Q13**, $|\alpha_n| \left| \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \right| \leqslant \dfrac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}}$ donc

$$\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} \frac{\sqrt{n!}}{(n-k)!} |x|^{n-k} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}} = \sqrt{n!} |x|^{n-p-1} p! \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!}$$

$$\text{Mais } \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

puisque tous les coefficients du binôme sont positifs.

Or $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$ par la formule du binôme donc

$$\boxed{\left| u_n^{(p)}(x) \right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n}$$

Q17. On utilise le $\boxed{\text{théorème de dérivation terme à terme } p \text{ fois (pour tout } p\text{) sur } [-a,a] \text{ (pour tout } a>0\text{) :}}$

- il est clair que $\boxed{u_n \text{ est } \mathcal{C}^p \text{ pour tout } n}$ (car $\mathcal{C}^\infty$) ;
- Pour tout k, d'après **Q16**, pour tou $x \in [-a,a]$ on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p!2^n \leqslant \frac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p!2^n \text{ donc } \|u_n^{(p)}\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant \underbrace{\frac{a^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p!2^n}_{=x_n}.$$

Le majorant x_n ne dépend pas de x (c'est ici que l'on voit qu'il fallait travailler sur $[-a,a]$ pour majorer $|x|$).
De plus $x_n > 0$ et :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2a}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

Donc la série $\sum x_n$ converge (règle de d'Alembert).
Ainsi la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment $[-a,a]$.
En particulier $\boxed{\sum\limits_k u_k^{(p)} \text{ converge uniformément sur } [-a,a]}$

$\boxed{\text{et les séries } \sum\limits_k u_k^{(j)} \ (j \in [\![0,p-1]\!]) \text{ convergent simplement sur } [-a,a].}$

Ainsi $U = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[-a,a]$ pour tout p et tout $a>0$, donc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, l'on a : $\boxed{\forall k,\ \forall x \in \mathbb{R},\ U^{(p)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n^{(k)}.}$

Q18. La question précédente montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U^{(p)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)}$.

▶ Si $n \geqslant 1$, $u_n(0) = 0$ donc

$$\boxed{U(0)} = \sum_{n\geqslant 0} u_n(0) = u_0(0) = \boxed{a_0}$$

▶ Soit $p \geqslant 1$. Si $n > p$ alors $u_n^{(p)}(0) = 0$ d'après **Q15** donc

$$\boxed{U^{(p)}(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \boxed{\sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p}$$

toujours d'après **Q15**.

Q19. [question plus difficile]

Soit $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On va montrer comment construire une suite réelle $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que la fonction U définie précédemment (qui est bien indéfiniment dérivable) vérifie pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U^{(p)}(0) = b_p$.

Les a_n seront construits petit à petit, par récurrence.

▶ Tout d'abord, la question précédente montre que si l'on prend $a_0 = b_0$ alors on a bien $\boxed{U(0) = b_0}$ (en supposant que l'on a construit U).

▶ Regardons maintenant pour a_1. Si U existe, la question précédente donne $U'(0) = u_0'(0) + a_1$. u_0 a déjà été choisie au moment où l'on a posé a_0. Ainsi, il suffit de prendre $a_1 = b_1 - u_0'(0)$ pour garantir que $\boxed{U'(0) = b_1}$.

▶ Regardons ensuite pour a_2. Si U existe, la question précédente donne $U''(0) = u_0''(0)+u_1''(0)+2a_2$. u_0 et u_1 ont déjà été choisies au moment où l'on a posé a_0 et a_1. Ainsi, il suffit de prendre $a_2 = \frac{1}{2}\left(b_2 - u_0''(0) - u_1''(0)\right)$ pour garantir que $\boxed{U''(0) = b_2}$.

▶ On construit donc par récurrence la suite (a_p) de la manière suivante : on pose $a_0 = b_0$ puis, pour $p \geqslant 1$,

$$a_p = \frac{1}{p!}\left(b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0)\right)$$

où $u_0, \ldots, u_{p-1}$ sont bien définies par $a_0, \ldots, a_{p-1}$ qui ont déjà été construits.

La fonction U correspondant aux (a_p) vérifie alors

$$\boxed{U \text{ est } C^\infty \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ U^{(p)}(0) = b_p}$$

On a donc démontré le théorème de Borel.