PSI et PC* DS7 bis le 12 février 2025

durée 4h. Le sujet comporte 4 pages

Les calculatrices sont interdites

- Les solutions devront être présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter plus tard), rédigées avec une **encre foncée**.
- Ce qui est écrit sur une page ne devra pas dépasser sur la page située à côté.
- Chaque fois que le résultat d'une question précédente sera utilisé (ce qui est possible même si la question n'a pas été traitée), **le numéro de cette question** devra être mentionné clairement
- Les théorèmes utilisés devront être mentionnés explicitement et leurs hypothèses seront mentionnées, et, si nécessaire, vérifiées avec soin. Les solutions doivent être rédigées de manière claire, compréhensible et rigoureuse ; il en sera tenu le plus grand compte dans la notation finale.
- **Les résultats seront encadrés**.

Le sujet est consacré à la formule sommatoire de Poisson et l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Notations

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

I. Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

Q 1 *Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.*

Q 2 *Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx$ est convergente.*

Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Q 3 *Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.*

Q 4 *On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \theta(x) = \exp(-x^2)$.*

a Montrer que $\widehat{\theta}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle: $y' = -\frac{x}{2}y$.

b En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)dt = \sqrt{\pi}$, déterminer $\widehat{\theta}(x)$ pour tout x réel.

Q 5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $\widehat{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (\widehat{f})^{(n)}(x) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-ixt} dt$$

II. Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On pose :

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

Q 6 *Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.*

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\phi_h : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, +\infty[& \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{array} \right. \quad \text{(pour } x \text{ réel, } \lfloor x \rfloor \text{ est la partie entière de } x\text{).}$$

Q 7 *Montrer que, pour tous $h \in]0; 1]$ et $t \in [1; +\infty[$, on a*

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

Q 8 *Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$.*

Q 9 *Montrer que $S(h) = \int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$.*

Q 10 *En déduire que*

$$S(h) \to \int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ quand } h \to 0.$$

Q 11 *En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La fonction R est-elle dérivable en 0 ?*

III. Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.
Si u est un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on pose pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)e^{-ipt}dt$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie :
si u et v sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$.
On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

On pose également

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Q 12 *Montrer que la fonction G est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.*

Q 13 *Montrer que la fonction F est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.*

Q 14 *Soit $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que $c_p(G) = \widehat{f}(p)$*

Q 15 *Montrer que $G = 2\pi F$.*

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi).$$

Q 16 *Montrer que, pour tout réel strictement positif a, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson.*

IV. Une application de la formule sommatoire de Poisson

Q 17 *Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction paire et continue telle que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$,*

alors il existe $C_1 > 0$ tel que : $|f(t)| \leq \dfrac{C_1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Q 18 *Soit $u > 0$.*

a Calculer $\hat{f}$ pour f donnée par $f(t) = e^{-|t|u}$.

b En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+u^2} = \frac{\pi}{2u}\frac{1+e^{-2\pi u}}{1-e^{-2\pi u}} - \frac{1}{2u^2}$

Q 19 *Soit ϕ la fonction définie pour $h \in \mathbb{R}^*$ par :*

$$\phi(h) = \frac{\pi^2}{h^2(e^h-1)}\left(h(1+e^h) + 2(1-e^h)\right),$$

Etudier la limite de ϕ en 0. En déduire $\displaystyle\lim_{u\to 0^+} \frac{\pi}{2u}\frac{1+e^{-2\pi u}}{1-e^{-2\pi u}} - \frac{1}{2u^2}$.

Q 20 *Montrer que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

V. Etude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it^2} - 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \\ i & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Q 21 *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Q 22 *Etablir que $f'(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \to \pm\infty$.*

Q 23 *Montrer que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est convergente.*

Q 24 *Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} e^{-ixt} dt = e^{-ix^2/4} \times I$ où I est l'intégrale définie dans la question précédente.*

Q 25 *Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.*

On pose à présent

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2 x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Q 26 *En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que*

$$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2}) \text{ quand } x \to 0 \text{ par valeurs strictement positives.}$$

Préciser la valeur de b, et exprimer a en fonction de I.

Q 27 *Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.*

Q 28 *Déduire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.*

CORRECTION DS 7bis maths PSI PC*

(sujet mines PC 2019 adapté pour un devoir de 4h)

I I. Préliminaires

R 1 *Posons, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$.
• *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, f_n *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$ *par opérations sur les fonctions usuelles.*
• *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, *donc* $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ *(il y a même égalité car* $f_n(\pi/(2n^2)) = 1/n^2$*).*
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge (Riemann et* $2 > 1$*), donc, par comparaison,* $\sum_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty$ *converge, donc* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge normalement, donc uniformément, sur* $\mathbb{R}$.
• *Par suite,* $R : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

R 2 • $f : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.
• $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\to} 1$, *donc* f *est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur* $]0,1]$.
• *Pour tout* $x \geq 1$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$.
Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$, *donc, par comparaison,* f *est intégrable sur* $[1,+\infty[$.
• f *est donc intégrable sur* $\mathbb{R}_+^*$, *donc, en particulier,* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ *converge.*

R 3 *Soit* $g : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(t)e^{ixt}$.
• *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t) = f(t)e^{ixt}$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *comme produit de fonctions continues par morceaux.*
• *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t) = f(t)e^{ixt}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(exponentielle...)*
• *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(x,t)| = |f(t)|\,|e^{ixt}| \leq |f(t)|$$

où $|f|$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *(car* f *l'est).*
• $\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)dt$ *est donc définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

R 4 *Etude de* θ*:*

a Appliquons la formule de de Leibniz: $\forall x \in \mathbb{R},\ \theta(x) = \exp(-x^2)$.
On pose $g\left(x,t\right) = e^{-t^2}e^{-ixt}$.
$(H_1) : \forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto g(x,t)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *car* $|g\left(x,t\right)| = e^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ *en* $+\infty$ *et* $-\infty$.
(H_2) : *Pour tout* t, *la fonction* $x \mapsto g(x,t)$ *est dérivable de dérivée*

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(x,t\right) = (-it)e^{-t^2}e^{-ixt}.$$

$(H_3) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x,t\right)$ *est continue par morceaux (car continue) sur* $\mathbb{R}$.
$(H_4) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x,t\right)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
(H_5) :Domination de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$: $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x,t\right)\right| = te^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ *en* $+\infty$ *et* $-\infty$ *donc* $t \mapsto te^{-t^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$.
Remarque: (H_2) *et* (H_4) *peuvent être remplacés par: Pour tout* t, *la fonction* $x \mapsto g(x,t)$ *est de classe* C^1.

On en déduit que $\widehat{\theta}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{\theta}'(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty} -te^{-t^2}e^{-ixt}\, dt$.
Intégrons par parties ce résultat avec $\left\{\begin{array}{l} u\left(t\right) = \dfrac{1}{2}e^{-t^2}; u'\left(t\right) = -te^{-t^2} \\ v\left(t\right) = e^{-ixt}, v'\left(t\right) = -ixe^{-ixt} \end{array}\right.$,

on a $\widehat{\theta}'(x) = i\left([u(t)v(t)]_{-\infty}^{+\infty} + i\frac{x}{2}\widehat{\theta}(x)\right)$. *Or* $|u(t)v(t)| = \frac{1}{2}e^{-t^2} \to_{t\to\pm\infty} 0$ *donc* $\widehat{\theta}'(x) = -\frac{x}{2}\widehat{\theta}(x)$.

b *Il existe donc* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widehat{\theta}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ *et* $\widehat{\theta}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)dt = \sqrt{\pi}$ *donc* $\widehat{\theta}(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

R 5 *Utilisons le* $\boxed{\textit{la généralisation de la formule de Leibniz des intégrales à paramètres.}}$
On pose $g(x,t) = f(t)e^{-ixt}$.
(H_1) : $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto g(x,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* $\mathbb{R}$. *(car* $|g(x,t))| = |f(t)|$*)*
(H_2) : *Pour tout* t, *la fonction* $x \mapsto g(x,t)$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = (-it)^n f(t)e^{-2i\pi xt}.$$

(H_3) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)$ *est continue par morceaux (car continue) sur* $\mathbb{R}$.
(H_4) : Domination de $\frac{\partial^n g}{\partial x^n}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)| = |t^n f(t)| = \varphi_n(t).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. *La fonction* $t \mapsto t^n f(t)$ *est continue par morceaux (car continue) sur* $\mathbb{R}$.
et $t \mapsto t^{n+2}f(t)$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$, *donc* $\boxed{t^n f(t) = O(1/t^2)}$ *au voisinage de* $+\infty$.*et* $-\infty$.
Comme $t \mapsto 1/t^2$ *est intégrable au voisinage de* $+\infty$.*et* $-\infty$, *on obtient que* $t \mapsto t^n f(t)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *par* $\boxed{\textit{théorème de comparaison.}}$
On en déduit que $\widehat{f}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f}^{(n)}(x) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)e^{-ixt}\,dt$$

II. Etude de la dérivabilité de R en 0

R 6 *Pour tout* $h > 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(nh)| \leq \frac{C}{1+n^2h^2} \leq \frac{c}{n^2h^2}$.
Or $\sum_{n\geq 1}\frac{C}{h^2n^2}$ *converge (Riemann et* $2 > 1$*), donc, par comparaison,* $\sum_{n\geq 0}|f(nh)|$ *converge, donc* $\sum_{n\geq 0} f(nh)$ *converge absolument, donc converge, ce qui assure l'existence de* $S(h) = h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.

R 7 *Pour tout* $h \in]0,1]$, *pour tout* $t \in [1,+\infty[$, *on a* $t/h \geq 1$ *et*

$$\begin{aligned}|\phi_h(t)| = \left|f\left(\left\lfloor\frac{t}{h}\right\rfloor h\right)\right| &\leq \frac{C}{\left(\left\lfloor\frac{t}{h}\right\rfloor h\right)^2+1}\\ &\leq \frac{C}{\left(\left(\frac{t}{h}-1\right)h\right)^2+1} \quad \textit{(car pour tout } x \geq 1,\ \lfloor x\rfloor \geq x-1 \geq 0)\\ &= \frac{C}{(t-h)^2+1} \leq \frac{C}{(t-1)^2+1} \quad \textit{(car } t-h \geq t-1 \geq 0).\end{aligned}$$

R 8 *Soit* $h > 0$.
ϕ_h *est continue par morceaux* $[0,+\infty[$ *car sur tout segment* $[0,+\infty[$ *de* $\mathbb{R}$, ϕ_h *a un nombre fini de discontinuités (les éléments de* $h\mathbb{N}\cap[a,b]$*) en lequelles il y a une limite réelle à gauche et à droite.*
D'après la question précédente pour tout $t \geq 1$, *et* $h \in]0,1]$,

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{(t-1)^2+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{t}{h}\right)^2 h^2} = \frac{C}{t^2},$$

donc $\phi_h(t) = \underset{t \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *(Riemann et* $2 > 1$*), donc, par comparaison,* ϕ_h *est intégrable sur* $[1, +\infty[$.
De plus, ϕ_h *est continue par morceaux sur le segment* $[0, 1]$*, donc intégrable sur* $[0, 1]$.
ϕ_h *est donc intégrable sur* $[0, +\infty[$*, donc, en particulier,* $\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$ *converge.*

R 9 *Par suite,*

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^{nh} \phi_h(t)dt \quad \textit{(car l'intégrale converge)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \phi_h(t)dt \quad \textit{(relation de Chasles)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) dt \quad \textit{(définition de } \phi_h\textit{)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f\left(kh\right) dt \quad \textit{(car } \forall t \in [kh, (k+1)h[, \ \frac{t}{h} \in [k, k+1[\textit{)} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hf(kh) \quad \textit{(intégrale d'une constante)} \\
&= h \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kh) = h \sum_{k=0}^{+\infty} f(kh) \quad \textit{(car la série converge)} \\
&= S(h).
\end{aligned}$$

R 10 *On applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu:*
- *Pour tout* $h > 0$, $t \mapsto \phi_h(t)$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$ *car* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $\lfloor . \rfloor$ *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$*, donc, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t - h = \left(\frac{t}{h} - 1\right) h \leq \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h \leq \frac{t}{h} h = t.$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \to 0} \left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h = t$*, et donc, par continuité de* f *sur* $\mathbb{R}$*, donc en* t*, on a*

$$\lim_{h \to 0} \phi_h(t) = f(t),$$

et f *est continue (par morceaux) sur* $\mathbb{R}_+$.
- *Pour tout* $h > 0$*, pour tout* $t \in [0, 1]$,

$$|\phi_h(t)| = \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \right| \leq \frac{C}{1 + \left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2} \leq C,$$

et, pour tout $t > 1$, $\phi_h(t) \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}$ *d'après la question précédente, donc*

$$|\phi_h(t)| \leq \begin{cases} C & \textit{si } t \in [0, 1] \\ \dfrac{C}{1 + (t-1)^2} & \textit{si } t > 1 \end{cases} = \varphi(t)$$

donc φ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$.
- *D'où, par convergence dominée,* $\lim\limits_{h \to +0} \int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$*.donc, d'après une question déja traitée,*

$$\lim_{h \to 0} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

R 11 *Prenons* $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$.

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en 0 (car $\frac{\sin x^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \to 1 = f(0)$), donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \leq \begin{cases} \frac{x^2}{x^2} & si\ x \in [-1,1] \quad (car\ |\sin(t)| \leq |t|\ pour\ tout\ t \in \mathbb{R}) \\ \frac{1}{x^2} & si\ |x| > 1 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)/2} = \frac{2}{1+x^2} & si\ x \in [-1,1] \quad (car\ pour\ tout\ x \in [-1,1],\ 0 < (1+x^2)/2 \leq 1) \\ \\ \frac{2}{1+x^2} & si\ |x| > 1 \quad (car\ pour\ tout\ |x| > 1,\ \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \leq 2) \end{cases}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}.$$

De plus, pour tout $x > 0$, $f(n\sqrt{x}) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2x}$, donc $\frac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sqrt{x}^2 f(n\sqrt{x})$, donc

$$R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x}^2 f(n\sqrt{x}) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{x})\right) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}\sum_{n=0}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) - \sqrt{x}f(0)\right)$$

$$= \sqrt{x}\overbrace{\Big(\underbrace{S(\sqrt{x})}_{\underset{x\to 0^+}{\to} \int_0^{+\infty} f(t)dt = \sqrt{\pi/2}} - \underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0}\Big)}^{\to\sqrt{\pi/2}\neq 0}$$

$$\underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}.$$

• *Par suite, comme $R(0) = 0$, $\frac{R(x)-R(0)}{x-0} = \frac{R(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, donc R n'est pas dérivable en 0 (et la courbe représentative de R admet une demi-tangente verticale en 0)*

III. Formule sommatoire de Poisson

R 12 *Appliquons le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions:*
Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \widehat{f}(n)e^{inx}$.
• *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}$.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_n(x)| = |\widehat{f}(n)e^{inx}| = |\widehat{f}(n)| \leq \frac{C_2}{1+n^2},$$

donc $\|g_n\|_\infty \leq \frac{C_2}{1+n^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 0} \|g_n\|_\infty$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.
$G_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.
• *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_{-n} est continue sur $\mathbb{R}$.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_{-n}(x)| = |\widehat{f}(-n)e^{-inx}| = |\widehat{f}(-n)| \leq \frac{C_2}{1+n^2},$$

donc $\|g_{-n}\|_\infty \leq \frac{C_2}{1+n^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge absolument (Riemann et* $2 > 1$*), donc, par comparaison,* $\sum_{n\geq 1} \|g_{-n}\|_\infty$ *converge, donc* $\sum_{n\geq 1} g_{-n}$ *converge normalement, donc uniformément, sur* $\mathbb{R}$.

$G_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_{-n}(x)$ *est donc définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

- $G = G_0 + G_1$ *est donc définie et continue sur* $\mathbb{R}$ *comme somme de deux fonctions continues.*
- *Comme, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, g_n *est* 2π*-périodique, donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x + 2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(x + 2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(x) = G(x),$$

donc G *est* 2π*-périodique.*

R 13 *Appliquons le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions:*
Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x + 2n\pi)$.

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = |f(x + 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x + 2n\pi)^2}, \quad \text{donc} \quad f(x + 2n\pi) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge absolument (Riemann et* $2 > 1$*), donc, par comparaison,* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *converge absolument, donc converge.*
De même, pour tout $n \geq 1$,

$$|f_{-n}(x)| = |f(x - 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x - 2n\pi)^2}, \quad \text{donc} \quad f(x - 2n\pi) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge absolument (Riemann et* $2 > 1$*), donc, par comparaison,* $\sum_{n\geq 0} f_{-n}(x)$ *converge absolument, donc converge.*
Par suite, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *et* $\sum_{n\geq 1} f_{-n}(x)$ *convergent, donc* $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x)$ *existe.*

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_n(x + 2\pi) = f(x + 2n\pi + 2\pi) = f(x + 2(n + 1)\pi) = f_{n+1}(x),$$

donc $F(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{n+1}(x) \underset{\text{en posant } j = n+1}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_n(x) = F(x)$, *donc* F *est* 2π*-périodique.*

- *Comme* F *est* 2π*-périodique,* F *est continue sur* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* F *est continue sur* $[0, 2\pi]$. *Or :*
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue sur* $[0, 2\pi]$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $x \in [0, 2\pi]$,

$$|f_n(x)| = |f(x + 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x + 2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1 + (2n\pi)^2},$$

donc $\|f_n\|_\infty^{[0,2\pi]} \leq \frac{C_1}{1+(2n\pi)^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *converge absolument (Riemann et* $2 > 1$*), donc, par comparaison,* $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty^{[0,2\pi]}$ *converge, donc* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement, donc uniformément, sur* $[0, 2\pi]$.

$F_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est donc continue sur* $[0, 2\pi]$.

De même,

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, f_{-n} *est continue sur* $[0, 2\pi]$.
- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *pour tout* $x \in [0, 2\pi]$,

$$|f_{-n}(x)| = |f(x - 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x - 2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1 + (2(n - 1)\pi)^2},$$

donc $\|f_{-n}\|_\infty^{[0,2\pi]} \leq \frac{C_1}{1+(2(n-1)\pi)^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ *converge absolument (Riemann et* $2>1$*), donc, par comparaison,* $\sum_{n\geq 1}\|f_{-n}\|_\infty^{[0,2\pi]}$ *converge, donc* $\sum_{n\geq 1} f_{-n}$ *converge normalement, donc uniformément, sur* $[0,2\pi]$.

$F_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x)$ *est donc continue sur* $[0,2\pi]$.

$F = F_0 + F_1$ *est donc continue sur* $[0,2\pi]$ *comme somme de fonctions continues, et, par suite,* F *est continue sur* $\mathbb{R}$.

R 14 *Soit* $p \in \mathbb{Z}$.

On a $G(t)\,e^{-pt} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{int}\right)e^{-ipt} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{i(n-p)t}$

et pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $u_n : t\mapsto \widehat{f}(n)e^{i(n-p)t}$ *est continue sur* $[0,2\pi]$ *et de même que précédement,*
les séries de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ *convergent normalement, donc uniformément sur* $[0,2\pi]$.
On a donc

$$\begin{aligned}
c_p(G) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{int}\right)e^{-ipt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{f}(n)e^{i(n-p)t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(-n)e^{-i(n+p)t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\widehat{f}(n)e^{i(n-p)t}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\widehat{f}(-n)e^{-i(n+p)t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{f}(n)\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{i(n-p)t}dt}_{=0\ si\ n\neq p} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\widehat{f}(-n)\underbrace{\int_0^{2\pi}e^{-i(n+p)t}dt}_{=0\ si\ n\neq -p} \\
&= \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(p)\int_0^{2\pi}1dt = \widehat{f}(p).
\end{aligned}$$

R 15 *On calcule* $c_p(2\pi f)$ *de même:*
$\sum_{n\geq 0} f_n(t)e^{-ipt}$ *et* $\sum_{n\geq 1} f_{-n}(t)e^{-ipt}$ *convergent normalement, donc uniformément, sur* $[0,2\pi]$ *car* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} f_{-n}$ *convergent normalement et* $|e^{-ipt}| = 1$ *pour tout* $t\in[0,2\pi]$.
De plus, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $t\mapsto f_n(t)e^{-ipt}$ *est continue sur* $[0,2\pi]$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
c_p(2\pi F) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(t)\right)e^{-ipt}dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t)\right)e^{-ipt}dt \quad \textit{(par définition de } \sum_{n\in\mathbb{Z}}\textit{)} \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)e^{-ipt}dt + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t)\right)e^{-ipt}dt \quad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)e^{-ipt}dt + \int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t)e^{-ipt}dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_n(t)e^{-ipt}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f_{-n}(t)e^{-ipt}dt \\
&\qquad \textit{(intervertion } \sum / \int \textit{ justifiée grâce aux hypothèses vérifiées avant le calcul)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(t+2n\pi)e^{-ipt}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(t-2n\pi)e^{-ipt}dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ip(t-2n\pi)}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t)e^{-ip(t+2n\pi)}dt \quad \textit{(changement de variable affine)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)e^{-ipt}dt + \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t)e^{-ipt}dt \quad \textit{(car } t\mapsto e^{-ipt} \textit{ est } 2\pi\textit{-périodique)} \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ipt}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-ipt}dt \\
&\qquad \textit{(relation de Chasles et intégrales convergentes car, comme } |f(t)| \le \frac{C_1}{1+t^2}, f \textit{ est intégrable)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ipt}dt = \widehat{f}(p).
\end{aligned}$$

• *On a donc $c_p(2\pi F) = c_p(G)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$, donc, d'après la propriété admise (on a bien aussi $(2\pi F, G)\in(\mathcal{C}_{2\pi})^2$), on a $G = 2\pi F$.*

R 16 *Soit $g : t\in\mathbb{R}\mapsto f\left(\frac{at}{2\pi}\right)$.*
• *g est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues.*
• *Pour tout $t\in\mathbb{R}$,*

$$|g(t)| = \left|f\left(\frac{at}{2\pi}\right)\right| \le \frac{C_1}{1+(at/2\pi)^2}.$$

Or, $h : t\in\mathbb{R}\mapsto \frac{\frac{C_1}{1+(at/2\pi)^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{C_1(1+t^2)}{1+(at/\pi)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} h(t) = \frac{C_1\pi^2}{a^2}$, donc il existe A_1 et A_2 tel que

$$\forall t\ge A_1, 0\le h(t)\le \frac{C_1\pi^2}{a^2}+1 \quad \textit{et} \quad \forall t\le A_2, 0\le h(t)\le \frac{C_1\pi^2}{a^2}+1.$$

De plus, h est continue sur le segment $[A_1, A_2]$, donc est bornée sur cet intervalle.
h est donc bornée sur $]-\infty, A_2]$, sur $[A_2, A_1]$ et sur $[A_1, +\infty[$, donc h est bornée sur $\mathbb{R}$.
Soit M un majorant de h sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$|g(t)| \le \frac{C_1}{1+(at/2\pi)^2} = \frac{1}{1+t^2}h(t) \le \frac{M}{1+t^2}.$$

• *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-itx}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{2\pi}\right)e^{-ixt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi xu/a} \times \frac{2\pi}{a}du \quad \textit{(changement de variable affine } u = \frac{at}{2\pi}\textit{)} \\
&= \frac{2\pi}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i(2\pi x/a)u}du = \frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)
\end{aligned}$$

Comme pour f*, on montre alors l'existence de* $N \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{g}(x)| = \left|\frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right| \leq \frac{N}{1+x^2}.$$

• *En appliquant alors le résultat de la question précédente à la fonction* g*, qui vérifie les mêmes hypothèses que* f*, on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi), \quad ie \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{a}\widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na).$$

En divisant enfin par 2π *de part et d'autres, on obtient bien le résultat demandé.*

IV. Une application de la formule sommatoire de Poisson

R 17 *Comme* $\frac{1}{t^2} \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}$*, l'hypothèse* $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ *s'écrit aussi* $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$.
Ainsi il existe $M > 0$ *et* $C > 0$ *tels que :* $\forall t > M,\ |f(t)| \leq \dfrac{C}{1+t^2}$.
Par ailleurs, comme $\boxed{\textit{la fonction } t \mapsto (1+t^2)f(t) \textit{ est continue sur le segment } [0, M],}$
d'après le théorème des bornes atteintes elle est bornée sur $[0, M]$*: il existe donc* C' *tel que :*

$$\forall t \in [0, M],\ |f(t)| \leq \frac{C'}{1+t^2}.$$

Ainsi, en prenant $C_1 = \max(C, C')$*, on obtient* $\forall t \geq 0,\ |f(t)| \leq \dfrac{C}{1+t^2}$.
Pour finir, ceci reste vrai sur $\mathbb{R}_-$ *car les deux membres sont pairs.*

R 18 *Soit* $u > 0$.

a *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|u}e^{-ixt}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{tu}e^{-ixt}\ \mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-tu}e^{-ixt}\ \mathrm{d}t \ \textit{(relation de } \textsc{Chasles}\textit{)} \\
&= \left[\frac{e^{t(u-ix)}}{u-ix}\right]_{t\to-\infty}^{t=0} + \left[\frac{e^{t(-u-ix)}}{u-ix}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} \\
&= \frac{1}{u-ix} - \frac{1}{-u-ix} \quad \textit{car } u > 0 \\
&= \frac{2u}{u^2+x^2}
\end{aligned}$$

*b Il est clair que f et $\hat{f}$ sont continues, paires et que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\hat{f}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (par croissances comparées. Donc d'après 17 f et $\hat{f}$ vérifient les hypothèses de la partie **III** ; on peut donc appliquer la* $\boxed{\text{formule sommatoire de Poisson,}}$ *soit avec* $\boxed{a = 2\pi}$ *:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|2\pi n|u} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2u}{u^2+n^2}.$$

Or par parité pour la variable n, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2u}{u^2+n^2} = \underbrace{\frac{2}{u}}_{n=0} + 2\times 2u\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u^2+n^2}$$

$$\begin{aligned}\text{et } \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-|2\pi n|u} &= 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n u}\\ &= 1 + 2\frac{e^{-2\pi u}}{1-e^{-2\pi u}} \quad \text{(somme d'une série géométrique car } |e^{-2\pi u}| < 1)\\ &= \frac{1+e^{-2\pi u}}{1-e^{-2\pi u}}.\end{aligned}$$

On en déduit bien que : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+u^2} = \frac{\pi}{2u}\frac{1+e^{-2\pi u}}{1-e^{-2\pi u}} - \frac{1}{2u^2}}$

R 19 *Comme $e^h \underset{h\to0}{=} 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)$, on a :*

$$\begin{aligned}h(1+e^h) + 2(1-e^h) &\underset{h\to0}{=} h\times\left(1+1+h+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\right) + 2\left(-h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o\left(h^3\right)\right)\\ &= \frac{h^3}{6} + o\left(h^3\right) \sim \frac{h^3}{6}\end{aligned}$$

Comme par ailleurs $e^h - 1 \sim_{h\to0} h$, on a : $\phi(h) \sim_{h\to0} \frac{\pi^2}{h^3}\times\frac{h^3}{6} = \frac{\pi^2}{6}$. On en déduit que $\lim\limits_{h\to0}\phi(h) = \frac{\pi^2}{6}$.

Or $\frac{\pi}{2u}\frac{1+e^{-2\pi u}}{1-e^{-2\pi u}} - \frac{1}{2u^2} = \frac{-2\pi u\left(1+e^{-2\pi u}\right)+2\left(1-e^{-2\pi u}\right)}{4u^2\left(e^{-2\pi u}-1\right)} = \phi\left(-2\pi u\right)$

On en déduit que $\boxed{\lim_{u\to0^+}\frac{\pi}{2u}\frac{1+e^{-2\pi u}}{1-e^{-2\pi u}} - \frac{1}{2u^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

R 20 *On a envie de faire tendre u vers 0^+ dans la relation obtenue en 18*

Pour cela il suffit de montrer que la fonction $u \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+u^2}$ est continue.

Cela découle du $\boxed{\text{théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions :}}$

- *Pour tout $n\geq 1$, la fonction $h_n : u \mapsto \frac{1}{n^2+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
- *Pour tout $n \geq 1$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on a $|h_n(u)| \leq \frac{1}{n^2}$.*

Or le majorant ne dépend pas de u et la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ converge.

Donc la $\boxed{\text{série } \sum h_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}\text{, donc uniformément.}}$

Ainsi le théorème s'applique et donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{u\to0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+u^2} = \lim_{u\to0^+}\frac{\pi}{2u}\frac{1+e^{-2\pi u}}{1-e^{-2\pi u}} - \frac{1}{2u^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

IV. Etude de la dérivabilité de R en π

R 21 • *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, *donc, pour tout* $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{it^2}-1}{t^2} = \frac{1}{t^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} - 1\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n-2}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}t^{2n}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $t=0$ *car, pour* $t=0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}t^{2n}}{(n+1)!} = i = f(0)$, *donc*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1}t^{2n}}{(n+1)!},$$

et f *est donc développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.
• *Par suite,* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

R 22 *Pour tout* $t \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{2ite^{it^2}t^2 - 2t(e^{it^2}-1)}{t^4} = 2i\frac{e^{it^2}}{t} - 2\frac{e^{it^2}-1}{t^3}.$$

Comme $|e^{it^2}| = 1$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$|f'(t)| = O\left(\frac{1}{t}\right) - O\left(\frac{1}{t^3}\right) = O\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour tout $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2i\frac{2ite^{it^2}t - e^{it^2}}{t^2} - 2\frac{2ite^{it^2}t^3 - 3t^2(e^{it^2}-1)}{t^6} \\ &= -4e^{it^2} - 2i\frac{e^{it^2}}{t^2} - 4i\frac{e^{it^2}}{t^2} + 6\frac{e^{it^2}-1}{t^4} \\ &= -4e^{it^2} - 6i\frac{e^{it^2}}{t^2} + 6\frac{e^{it^2}-1}{t^4} = -4e^{it^2} + \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

R 23 • $x \mapsto e^{ix^2}$ *est continue sur le segment* $[0,1]$, *donc* $\int_0^1 e^{ix^2}dx$ *converge.*
• *Soit* $u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, v'^{ix^2}, $v(x) = -\frac{i}{2}e^{ix^2}$.
u *et* v *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[1,+\infty[$.
$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x} = 0$ *car* $|e^{ix^2}| = 1$.
D'où, par intégration par partie, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx = \int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ *est de même nature que* $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x^2}dx$.
Or, $\left|\frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x^2}\right| = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$,
donc, comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$, $x \mapsto \frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$, *donc, en particulier,* $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2}\frac{e^{ix^2}}{x^2}dx$ *converge, et, par suite,* $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx$ *converge.*
• $\int_0^1 e^{ix^2}dx$ *et* $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx$ *convergent, donc* $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$ *converge.*
Comme de plus $x \mapsto e^{ix^2}$ *est paire,* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}dx$ *converge.*

(autre méthode: poser $u = x^2$ dans $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}dx$ pour se ramener à $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{u}}e^{iu}du$ et intégrer par parties en dérivant $\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$).

R 24 *De plus, le changement de variable affine $u = t - x/2$ donne la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2}dt = -4e^{-ix^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2}du = -4e^{-ix^2/4}I,$$

Sous réserve de convergence, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2}dt = e^{-ix^2/4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2}du$ (changement de variable affine $u = t - x/2$)
donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2}e^{-ixt}dt$ converge et vaut $e^{i\frac{-x^2}{4}}I$.

R 25 • *Comme f est continue et intégrable (car $f(t) = \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$) sur $\mathbb{R}$, $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ d'après Q 3.*
• *Soit $x \in \mathbb{R}^*$.*
Posons $u(t) = f(t)$, $u'(t) = f'(t)$, v'^{-ixt}, $v(t) = \frac{i}{x}e^{-ixt}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to\pm\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \underbrace{\frac{i}{x}e^{ixt}}_{\text{borné}} \underbrace{f(t)}_{=O\left(\frac{1}{t^2}\right)\to 0} = 0.$
Enfin, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge (et vaut $\widehat{f}(x)$), donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \left[\frac{i}{x}f(t)e^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{x}f'(t)\,e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{x}e^{-ixt}f'(t)dt.$$

• *Posons cette fois $u(t) = f'(t)$, $u'(t) = f''(t)$, $v'(t) = -\frac{i}{x}e^{ixt}$, $v(t) = \frac{1}{x^2}e^{-ixt}$.*
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to\pm\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}e^{-ixt}}_{\text{borné}} \underbrace{f'(t)}_{\to 0 \text{ d'après 22}} = 0.$
Enfin, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge (et vaut $\widehat{f}(x)$), donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{x}e^{-ixt}f'(t)dt \\ &= \left[\frac{1}{x^2}e^{-ixt}f'(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}e^{-ixt}f''(t)dt \\ &= -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f''(t)dt.\end{aligned}$$

• *Or $f''(t) = -4e^{it^2} + j(t)$ avec $j(t) = \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto j(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et*

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt}dt\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |j(t)|dt = \underset{x\to\pm\infty}{O}(1).$$

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f''(t)dt$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes et

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f''(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt}dt \\ &= 4e^{-ix^2/4}I + \underset{x\to\pm\infty}{O}(1) = \underset{x\to\pm\infty}{O}(1)\end{aligned}$$

• *On a donc bien*

$$\widehat{f}(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f''(t)dt = -\frac{1}{x^2}\underset{x\to\pm\infty}{O}(1) = \underset{x\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

R 26 • *f est continue sur $\mathbb{R}$.*
De plus, comme $f(t) = \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $(t^2+1)f(t) = \underset{t\to\pm\infty}{O}(1)$, donc $t \mapsto (t^2+1)f(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et sur tout fermé borné de $\mathbb{R}$, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| \leq \frac{M}{1+t^2}.$$

De même, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 3) et $\widehat{f}(t) = \underset{t\to\pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (d'après la question 25), donc il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}(t)| \leq \frac{N}{1+t^2}.$$

On peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson à f. D'où, pour tout $x > 0$, en prenant $a = \sqrt{x}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right),$$

ie, comme f est paire et donc $\widehat{f}$ aussi (via le changement de variable $u = -t$),

$$i + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}-1}{n^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right).$$

Comme toutes les séries suivantes sont absolument convergentes, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}-1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = F(x) - F(0).$$

On a donc

$$i + \frac{2}{x}\left(F(x) - F(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\widehat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right), \quad ie \quad F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right).$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \frac{C_2}{1+\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{xC_2}{x+4n^2\pi^2} \leq x\frac{C_2}{4n^2\pi^2},$$

donc, en sommant et en utilisant l'inégalité triangulaire généralisée,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)\right| \leq x\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C^2}{4n^2\pi^2}}_{constante},$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) = \underset{x\to 0^+}{O}(x)$ et, par suite,

$$F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \underset{x\to 0^+}{O}(x\sqrt{x}).$$

On a donc $b = -i/2$ et $a = \frac{1}{2}\widehat{f}(0)$.

R 27 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$
\begin{aligned}
F(x+\pi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2(x+\pi)}}{n^2} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}e^{in^2\pi}}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}e^{in^2\pi}}{n^2} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \quad \textit{(car n et n^2 ont la même parité, donc $e^{in^2\pi} = (-1)^n$)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{4k^2} - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{k^2} - \left(F(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{4k^2} \right) \\
&= \frac{1}{4} F(4x) - \left(F(x) - \frac{1}{4} F(4x) \right) = \frac{1}{2} F(4x) - F(x).
\end{aligned}
$$

R 28 *Pour tout $x > 0$,*

$$
\begin{aligned}
R(x+\pi) = \operatorname{Im}(F(x+\pi)) &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}(F(4x)) - \operatorname{Im}(F(x)) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(F(0) + \sqrt{x}\widehat{f}(0) - 2ix + \underset{x\to 0^+}{O}(x\sqrt{x}) \right) - \operatorname{Im}\left(F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2}\widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \underset{x\to 0^+}{O}(x\sqrt{x}) \right) \quad \textit{(question 26)} \\
&= -\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0^+}{O}(x\sqrt{x}) \quad \textit{(car $F(0) \in \mathbb{R}$)} \\
&= -\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0^+}{o}(x).
\end{aligned}
$$

Comme R est impaire (somme de fonctions impaire) et 2π-périodique, on a, pour tout $x < 0$,

$$
R(\pi+x) = R(\pi+x-2\pi) = R(-(\pi+(-x))) = -R(\pi+(-x)) = -\left(-\frac{1}{2}(-x) + \underset{-x\to 0^+}{o}(x) \right) = -\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0^-}{o}(x).
$$

On a donc $R(x) = -\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
R est donc définie et continue en π (question 1) et admet un développement limité à l'ordre 1 en π, donc R est dérivable en π et $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$.