Mardi 13 mai 2025

Exercice 1 *(ccp): Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

1. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = 1$.*
2. *On note, pour $k \in [[0, n-1]]$, $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.*
   Pour quelles valeurs de n le complexe $P = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-\omega_k}{1+\omega_k}$ est-il défini?
3. *On suppose que P est défini et on pose $x_k = \frac{1-\omega_k}{1+\omega_k}$. Exprimer ω_k en fonction de x_k. En déduire $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont racines de $(1+X)^n - (1-X)^n$.*
4. *On suppose que P est défini. Déterminer P. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.*

Solution de l'exercice: 1; En posant $z = \rho e^{i\theta}$ avec $(\rho, \theta) \in]0, \infty[\times [0, 2\pi[$, on obtient
$z^n = 1 \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = 1 \times e^{i0} \Leftrightarrow \rho^n = 1$ et $\exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = \omega_k$.
Or $\omega_k = \omega_{k+n}$
donc $z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [[0, n-1]], z = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.
2: Il existe k tel que $1 + \omega_k = 0$ si et seulement si -1 est racine de l'équation $z^n = 1$ si est seulement si n est pair. On en déduit que P est défini si et seulement si n est n impair.
3: Posons $x_k = \frac{1-\omega_k}{1+\omega_k}$. On a $(1-\omega_k)\, x_k = 1 + \omega_k$ donc $\omega_k = \frac{1-x_k}{1+x_k} : (R)$.
On en déduit que $\left(\frac{1-x_k}{1+x_k}\right)^n = 1$ donc $(1+x_k)^n - (1-x_k)^n = 0$ et x_k est racine de $Q = (1+X)^n - (1-X)^n$
4: En développant, on obtient $Q = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i X^i = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_i = \binom{n}{i}\left(1 - (-1)^i\right)$ donc $a_n = 2$ car n est impair, $a_1 = 2n$ et $a_0 = 0$. On a donc $Q = 2XQ_1$ où Q_1 est de degré $n-1$, de coefficient dominant 1, de coefficient constant n.
Les réel $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont non nuls ($\omega_k \neq 1$ si $k \in [[0, n-1]]$) et racines de Q donc racines de Q_1 distinctes. (car d'après (R), $x_i = x_j \Rightarrow \omega_i = \omega_j \Rightarrow i = j$).
$Q_1 = \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k)$ donc $Q_1(0) = (-1)^{n-1} P$ et $Q_1(0) = n$ donc $P = (-1)^{n-1} n$.
On a $\frac{1-\omega_k}{1+\omega_k} = \frac{1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1+e^{ik\frac{2\pi}{n}}} = \frac{e^{ik\frac{\pi}{n}}\left(e^{-ik\frac{\pi}{n}} - e^{ik\frac{\pi}{n}}\right)}{e^{ik\frac{\pi}{n}}\left(e^{-ik\frac{\pi}{n}} + e^{ik\frac{\pi}{n}}\right)} = \frac{-2i\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)}{2\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right)} = -i \times \tan\left(k\frac{\pi}{n}\right)$ donc, $P = (-i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
On en déduit que $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{P}{(-i)^{n-1}} = i^{n-1} (-1)^{n-1} n = (-i)^{n-1} n$. Or n est impair donc si $n = 2p+1$, $(-i)^{n-1} = \left((-i)^2\right)^p = (-1)^p$ donc $P = (-1)^p n$.

Exercice 2 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Montrer que $(X-1)^3$ est un diviseur de $nX^{n+2} - (n+2)\, X^{n+1} + (n+2)\, X - n$.

Solution de l'exercice: Posons $P_n = nX^{n+2} - (n+2)\, X^{n+1} + (n+2)\, X - n$.
Il suffit de vérifier que 1 est racine de multiplicité qu moins 3 de P_n soit $P_n(1) = P_n'(1) = P_n''(1)$. Calculs sans difficultés.

Exercice 3 *(Ccinp) Soit $(m, n, p) \in \mathbf{N}^3$ et $P = X^2 + X + 1$*

1. *Déterminer les racines de P.*

2. *Montrer que P divise $X^{3m+2}+X^{3n+1}+X^{3p}$.*

3. *Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels: P^2 divise $(X+1)^n-X^n-1$.*

Solution de l'exercice: Soit $A_n=X^{3m+2}+X^{3n+1}+X^{3p}$. On a $B=X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$ avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (résoudre l'équation $z^2+z+1=0$ en calculant le discriminant). Or B divise A_n si et seulement si chaque racine complexe de B est racine de A_n avec une multiplicité comme racine de B inférieure ou égale à sa multiplicité comme racine de A_n et $A_n(j)=j^{3m+2}+j^{3n+1}+j^{3p}=j^2+j+1$ car $j^3=1$ donc $j^{3k+l}=(j^3)^k j^l=j^l$. Or j est racine de B donc $A_n(j)=0$. Le polynôme A_n est à coefficients réels donc $A_n\left(\overline{j}\right)=A_n(j^2)=0$ et donc B divise A_n.
On pose $D=(X^2+X+1)^2=(X-j)^2(X-j^2)^2$ et $C_n=(X+1)^n-X^n-1$. On a l'équivalence D divise C_n si et seulement si $C_n(j)=C_n'(j)=C_n(j^2)=C_n'(j^2)=0$. On remarque que $1+j=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et donc que $C_n'(j)=0\Leftrightarrow n\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{n-1}-n\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{n-1}=0\Leftrightarrow\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{n-1}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{n-1}\Leftrightarrow 1=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{n-1}\Leftrightarrow 1=e^{i\frac{(n-1)\pi}{3}}$ donc $C_n'(j)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}|\ n=1+6k$. Si $n=1+6k$, alors $C_n(j)=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1+6k}-\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{1+6k}-1=e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{2\pi}{3}}-1=0$ et $C_n(j^2)=C_n'(j^2)=0$ car $\overline{j}=j^2$ donc D divise C_n si et seulement si $\exists k\in\mathbb{Z}|\ n=1+6k$.

Exercice 4 *Calculer, pour x réel,* $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$.

Exercice 5 *(Centrale): Pour θ réel et n entier naturel non nul, On pose $P_n=X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1$.*

1. *Pour quelles valeurs de θ le polynôme $X^2-2\cos(\theta)X+1$ admet-il deux racines distinctes? Préciser les valeurs de ces racines.*

2. *On suppose que θ n'est pas multiple de π.*

   (a) *Donner la décomposition en irréductible de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.*

   (b) *En déduire la décomposition en irréductible de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.*

3. *Même question si θ est multiple de π.*

Solution de l'exercice: La résolution de l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$ conduit à la factorisation $Y^2-2\cos(\theta)Y+1=\left(Y-e^{i\theta}\right)\left(Y-e^{-i\theta}\right)$ (la distinction $\Delta=0$, $\Delta<0$ apparaîtra plus tard) donc $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=\left(X^n-e^{i\theta}\right)\left(X^n-e^{-i\theta}\right)$.

- Si $\theta\neq k\pi$, alors l'équation $z^n=e^{i\theta}$ admet n racines complexes non réelles égales à $e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}$ noté z_k, $0\leq k\leq n-1$ et $z^n=e^{-i\theta}\Leftrightarrow z=e^{i\left(-\frac{\theta}{n}-k\frac{2\pi}{n}\right)}=z_k'$, $0\leq k\leq n-1$ (on préfère $-k\frac{2\pi}{n}$ à $+k\frac{2\pi}{n}$ pour avoir $z_k'=\overline{z_k}$, ce qui ne change rien puisque les valeurs $-k$ lorsque $0\leq k\leq n-1$ sont $n-1$ entiers consécutifs.
  $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(X-z_k)\prod\limits_{k=0}^{n-1}(X-\overline{z_k})=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(X-z_k)(X-\overline{z_k})$ donc
  $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)X+1\right)$.

- Si $\theta=2k\pi$, alors $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=(X^n-1)^2$. Or $z^n=1\Leftrightarrow z=e^{ik\frac{2\pi}{n}}=\omega_k$, $0\leq k\leq n-1$.
  Si n est pair, $n=2p$, l'équation $z^n=1$ admet deux solutions réelles $1=\omega_0$ et $-1=\omega_p$.
  On obtient $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=(X-1)^2(X+1)^2\prod\limits_{k=1}^{p-1}\left(X^2-2\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)X+1\right)^2$. (les ω_k, $1\leq k\leq p-1$ ont un argument entre 0 et π donc ne peuvent pas être conjugués deux à deux)
  Si n est impair, $n=2p+1$, cette équation admet une solution réelle $1=\omega_0$.
  On obtient $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=(X-1)^2\prod\limits_{k=1}^{p}\left(X^2-2\cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right)X+1\right)^2$.

- Si $\theta=\pi+2k\pi$, alors $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=(X^n+1)^2$ et $z^n=-1\Leftrightarrow z=e^{i\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}}=\omega'_k$, $0\le k\le n-1$.
  Si n est pair, $n=2p$, l'équation $z^n=-1$ n'admet pas de solution réelle. On obtient $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=\prod\limits_{k=0}^{p}\left(X^2-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)X+1\right)^2$.
  Si n est impair, $n=2p+1$, l'équation $z^n=-1$ admet une solution réelle $-1=\omega_p$.
  On obtient $X^{2n}-2\cos(\theta)X^n+1=(X+1)^2\prod\limits_{k=1}^{p}\left(X^2-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)X+1\right)^2$.

Exercice 6 *Mines ponts: Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.*

1. *Montrer que si $k\in[[1,n]]$, $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.*
2. *En déduire un calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.*
3. *En déduire un calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$.*

Solution de l'exercice: 1: Si $k\in[[1,n]]$, $k\binom{n}{k}=k\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}$.
2: $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=n.\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^k\times1^{n-1-k}=(1+1)^{n-1}=2^{n-1}$.
3: On en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}k\times k\binom{n}{k}=n\sum\limits_{k=1}^{n}k\binom{n-1}{k-1}=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n-1}{k}$ et, en utilisant la même égalité, que $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n\sum\limits_{k=0}^{n-1}k\binom{n-1}{k}+n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}=n(n-1)\sum\limits_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}+n\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$.
Or $\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p}{k}=\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^p=2^p$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=2^{n-2}n(n-1)+2^{n-1}n$.

Exercice 7 *Centrale: Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X-1)$.*

1. *Soit $z\in\mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que z^2 est racine de P.*
2. *Montrer que les racines complexes sont soit nulles, soit de module 1.*
3. *Montrer que 0 n'est pas racine de P.*
4. *Déterminer les polynômes vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X-1)$.*

Solution de l'exercice: 1: Soit z une racine de P. On a donc $P(z^2)=P(z)P(z-1)=0$ donc z^2 est racine de P.
2: Par le même raisonnement, $(z^2)^2=z^4$ est racine de P, $(z^4)^2=z^8$ est racine de P donc, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, z^{2^n} est racine de P. Si $|z|>1$, la suite $\left(\left|z^{2^n}\right|\right)$ est strictement croissante donc si $k\neq l$, alors $z^{2^k}\neq z^{2^l}$ donc P admet une infinité de racines. De même, si $0<|z|<1$. Un polynôme non nul admet un nombre fini de racines donc $|z|=1$ ou $|z|=0$.
3: De plus $P((z+1)^2)=P(z+1)P(z)=0$ donc $(z+1)^2$ est racine donc si 0 est racine de P, alors $(0+1)^2=1$ est racine et $(1+1)^2=4$ est racine ce qui contredit la question précédente.
4: On en déduit que $\left|(z+1)^2\right|=1$ (donc $|z+1|=1$) et $|z|=1$ soit, si $z=x+iy$ $\left\{\begin{array}{c}x^2+y^2=1\\ x^2+2x+y^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ et $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow z=e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}\Leftrightarrow z\in\{j,j^2\}$. Il existe des entiers naturels α,β tels que $P=C(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$.
Réciproquement, posons $P=C(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$. On a $P(X^2)=C(X^2-j)^\alpha(X^2-j^2)^\beta$ et $j^3=1$ donc $j^4=j$ donc $X^2-j=X^2-(j^2)^2=(X-j^2)(X+j^2)$ et $P(X^2)=C(X-j^2)^\alpha(X+j^2)^\alpha(X-j)^\beta(X+j)^\beta$ (décomposition en irréductible). Par ailleurs, $P(X)P(X-1)=C^2(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta(X-1-j)^\alpha(X-1-j^2)^\beta$. Or $1+j+j^2=0$ donc $P(X)P(X-1)=C^2(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta(X+j^2)^\alpha(X+j)^\beta$. D'après l'unicité de la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$, $P(X^2)=P(X)P(X-1)$ si et seulement si $C^2=C$ ($C=0$ ou $C=1$) et $\alpha=\beta$. Les solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes $(X-j)^\alpha(X-j^2)^\alpha=(X^2+X+1)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{N}$.

Exercice 8 *(Mines telecom) Soit $n \in \mathbb{N}$.*

A partir de l'égalité $(1+X)^{2n} = (1+X)^n \times (1+X)^n$, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Donner d'autres expressions de $\binom{2n}{n}$ comme somme de produits de deux coefficients binomiaux.

Solution de l'exercice: D'une part $(1+X)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$ et d'autre part $(1+X)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ donc $(1+X)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $c_k = \sum\limits_{0 \le i,j \le n, i+j=k} a_i a_j$ (coefficient d'un produit de polynômes) avec $a_j = \binom{n}{j}$.

On a donc $c_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

Exercice 9 *(centrale) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose, $P_n = P_n = X^n - X + 1$*

1. *Montrer que le polynôme P_n admet au plus une racine réelle.*
2. *Montrer que les racines complexes de P_n sont simples.*
3. *Soit r_1, r_2 et r_3 les racines complexes de P_3. Calculer $\begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 \end{vmatrix}$*

Solution de l'exercice:

1: Si $x \geq 1$, $x^n \geq x$ donc $x^n - x + 1 \geq 1$.
Si $x \in [0,1[$, alors $-1 < -x \leq x^n - x$ donc $x^n - x + 1 > 0$ donc $P_n(x)$ est strictement positifi sur $[0,+\infty[$.

Si $x \in]-\infty, 0[$.

- Si n est pair $P_n'(x) = nx^{n-1} - 1 < 0$ donc P_n est strictement monotone sur $]-\infty,0[$ et donc l'équation $P_n(x) = 0$ admet au plus une solution dans $]-\infty,0[$ donc dans $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.
- Si n est impair,
  Sur $]-\infty,0[$, $P_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = -\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ noté c.
  Or $P_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} < 0$ sur $]-\infty,0[$ donc P_n' est strictement décroissante $]-\infty,0[$ .. Si $x \in]-\infty,c[$ alors $P_n'(x) > 0$ et si $x \in]x,0]$, $P_n'(x) < 0$.

  Ce qui donne les variations:

x	$-\infty$ $\quad$ c	c $\quad$ 0
$P_n(x)$	$-\infty \nearrow P_n(c)$	$P_n(x) \searrow 1$
$P_n'(x)$	$+$	$-$

  . On en déduit (théorème de la bijection continue strictement monotone) que P_n admet une racine exactement dans l'intervalle $]-\infty,c[$.

2:.Si $z \in \mathbb{C}$ est racine mutiple alors $\begin{cases} P_n(z) = z^n - z + 1 \\ P_n'(z) = nz^{n-1} - 1 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} P_n(z) = z^n - z + 1 \\ nz^n = z \end{cases}$

On a donc$\dfrac{z}{n} - z + 1 = 0$ donc $\dfrac{n-1}{n} z = 1$ donc $z = \dfrac{n}{n-1}$.

Or $P_n'\left(\dfrac{n}{n-1}\right) = n\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1} - 1 \geq n - 1 > 0$ car $\left(\dfrac{n}{n-1}\right) \geq 1$ donc $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1} \geq 1$ donc P_n n'admet pas de racine double.

3: On a $D = \begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+r_1 & -r_1 & -r_1 \\ 1 & r_2 & 0 \\ 1 & 0 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r_1 & -r_1 \\ r_2 & 0 \end{vmatrix} + r_3 \begin{vmatrix} 1+r_1 & -r_1 \\ 1 & r_2 \end{vmatrix} = r_1 r_2 + r_3(r_2 + r_1 r_2 + r_1) = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 + r_1 r_2 r_3$.

Or $P_3 = 1 \times (X - r_1)(X - r_1)(X - r_1) = X^3 - (r_1 + r_2 + r_3) X^2 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) X - r_1 r_2 r_3$ d'où $\begin{cases} r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = -1 \\ r_1 r_2 r_3 = -1 \end{cases}$. On en déduit que $D = -2$.

Exercice 10 *(Mines telcom) Montrer que, si* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ *en considérant deux ensembles disjoints de cardinal* n.
Donner d'autres expressions de $\binom{2n}{n}$ *comme somme de produits de deux coefficients binomiaux.*

Solution de l'exercice: L'entier $\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties P à n éléments de $[|1, 2n|]$. Une partie P à n éléments est entièrement déterminée par les deux intersections $X_1 = P \cap [|1, n|]$ et $X_2 = P \cap [|n+1, 2n|]$.
Soit $k \in [[0, n]]$. Les parties X telles que $card\,(X_1) = k$ et $card\,(X_2) = n - k$ sont au nombre de $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$: il y a $\binom{n}{k}$ choix de X_1 et $\binom{n}{n-k}$ choix de X_2.
Comme k peut varier de 0 à n, il y a en tout $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ parties X de cardinal n. On en déduit que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$