Mercredi 14 mai 2025 après-midi

Exercice 1 *Mines telecom PSI 21: Soit* $E=\mathbb{C}_3[X]$ *et* $\varphi:\left\{\begin{array}{c} E\to E \\ P\mapsto P(1-X)\end{array}\right.$.

1. *Montrer que* φ *est un endomorphisme. Ecrire la matrice* A *de* φ *dans la base canonique de* E.
2. *L'endomorphisme* φ *est-il injectif? bijectif?*
3. *Ecrire* A^{-1}.
4. *Donner les éléments propres de* φ.
5. *Généraliser à la dimension* n
6. *En déduire des formules avec coefficients binômiaux*

Solution de l'exercice: 1: $\varphi(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)(1-X)=\lambda P(1-X)+\mu Q(1-X)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$.

De plus, $\left\{\begin{array}{c}\varphi(1)=1\\ \varphi(X)=1-X\\ \varphi(X^2)=(1-X)^2=1-2X+X^2\\ \varphi(X^3)=(1-X)^3=1-3X+3X^2-X^3\end{array}\right.$ donc $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

2: La matrice A est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls donc est inversible donc φ est bijective.

3: Si $P=a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3$, alors $\varphi(P)=a_0+a_1(1-X)+a_2(1-X)^2+a_3(1-X)^3$ donc
$\varphi(\varphi(P))=a_0+a_1(1-(1-X))+a_2(1-(1-X))^2+a_3(1-(1-X))^3=P$.

On en déduit que $\varphi\circ\varphi(P)=P$ donc $\varphi^2=id_E$ donc $A^2=I_4$ donc $A^{-1}=A$.

4:De plus, $X^2-1=(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de φ donc
φ est diagonalisable et $sp(\varphi)\subset\{-1,1\}$.

Première méthode: résoudre $AU=U$ et $AU=-U$ avec $U\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

Deuxième méthode: deviner des vecteurs propre:

On remarque que

$\varphi(1)=1$ donc $1\in E_1(\varphi)$.

$\varphi\left(X-\frac{1}{2}\right)=(1-X)-\frac{1}{2}=-X+\frac{1}{2}=-\left(X-\frac{1}{2}\right)$ donc $X-\frac{1}{2}\in E_{-1}(\varphi)$.

$\varphi\left(\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)=-\left((1-X)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(X-\frac{1}{2}\right)^2$ donc $\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\in E_1(\varphi)$ et de même $\left(X-\frac{1}{2}\right)^3\in E_{-1}(\varphi)$.

On a donc $vect\left(1,\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)\subset E_1(\varphi)$ et $vect\left(X-\frac{1}{2},\left(X-\frac{1}{2}\right)^3\right)\subset E_{-1}(\varphi)$ donc $\dim(E_1(\varphi))\geq 2$ et $\dim(E_{-1}(\varphi))\geq 2$. Or $\dim(E_1(\varphi))+\dim(E_{-1}(\varphi))\leq 4$ donc $\dim(E_1(\varphi))=\dim(E_{-1}(\varphi))=2$.

De plus, $vect\left(1,\left(X-\frac{1}{2}\right)^2\right)=E_1(\varphi)$ et $vect\left(X-\frac{1}{2},\left(X-\frac{1}{2}\right)^3\right)=E_{-1}(\varphi)$.

5: De même $\varphi(X^j)=(1-X)^j=\sum\limits_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-X)^i1^{n-i}$ donc $A=\begin{pmatrix}\binom{0}{0}&\binom{1}{0}&\cdots&\binom{n}{0}\\ 0&-\binom{1}{0}&&-\binom{n}{1}\\ &0&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&(-1)^n-\binom{n}{n}\end{pmatrix}$.

De même $\varphi(\varphi(P))=\varphi((P(1-X)))=P(1-(1-X))=P(X)$ donc $\varphi^2=id$ donc φ est diagonalisable et $sp(\varphi)=\{-1,1\}$.

φ est diagonalisable et $sp(\varphi) \subset \{-1, 1\}$.
.

On vérifie de la même façon que si $0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $\varphi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i}\right) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i}$ et $0 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$, $\varphi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i+1}\right) = -\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i+1}$.

La famille $\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{i}\right)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille de degrés échelonnés donc base de $\mathbb{C}_n[X]$ donc est une base de vecteur propres

On a $F = vect\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i}, 0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor\right) \subset E_1(\varphi)$ et $G = vect\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i+1}, 0 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor\right) \subset E_{-1}(\varphi)$.
et $F \oplus G = \mathbb{C}_n[X]$ donc $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ donc $F = E_1(\varphi)$ et $G = E_{-1}(\varphi)$.

Exercice 2 *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$. Donner une expression factorisée du déterminant de* $A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *CCINP PSI 21: Soit E un espace vectoriel de dimension n, l une forme linéaire non nulle de E et a un vecteur non nul de E. On définit l'application f de E dans E définie par $f(x) = l(a)x - l(x)a$.*

1. *Montrer que f est un endomorphisme de E.*
2. *Calculer $f(a)$.*
3. *Déterminer les éléments propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable? Indication: distinguer les cas $l(a) = 0$ et $l(a) \neq 0$.*
4. *On suppose $l(a) \neq 0$. Calculer f^2, en déduire un polynôme annulateur de f. Retrouver le résultat de la question précédente.*

Solution de l'exercice: 1: Découle de la linéarité de l. 2: On a $f(a) = 0$.
3: D'après la question précédente, $0 \in sp(f)$ et $a \in E_0(f)$.
De plus, f étant une forme linéaire non nulle, $\ker(f)$ est un sous-espace de dimension $n-1$.
Si $x \in \ker(f)$, $f(x) = l(a)x$ donc $l(a) \in sp(f)$ et $\ker(f) \subset E_{l(a)}(f)$.
Supposons $l(a) \neq 0$. On a $\dim(E_0(f)) \geq 1$ et $\dim\left(E_{l(a)}(f)\right) \geq n-1$ donc $\dim(E_0(f)) + \dim\left(E_{l(a)}(f)\right) \geq \dim(E)$ donc f est diagonalisable.
Supposons $l(a) = 0$ (donc $a \in \ker(f)$). On a $f(x) = -l(x)a$ et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(l)$ donc $\dim(E_0(f)) = n-1$.
Si $x \notin \ker(l)$, alors $f(x) = -l(x)a$ non colinéaire à x car $a \in \ker(l)$ donc x n'est pas vecteur propre. Il n'y a pas de vecteur propre hors de $\ker(l) = E_0(f)$ donc $sp(f) = \{0\}$ et $\dim(E_0(f)) = n-1$ donc f n'est pas diagonalisable.
4: On a $f(f(x)) = f(l(a)x - l(x)a) = l(a)f(x) - l(x)f(a) = l(a)f(x)$ d'après Q2. On en déduit que, $\forall x \in E$, $f^2(x) - l(a)f(x) = 0_E$ donc $f^2 - l(a)f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ Le polynôme $X^2 - l(a)X = X(X - l(a))$ est un polynôme annulateur de f et est scindé à racines simple ($l(a) \neq 0$) donc f est diagonalisable.

Exercice 4 *Ccinp: Soit $x_1, ..., x_n$ et $y_1, ..., y_n$ des complexes. Calculer le déterminant de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & & x_2y_n \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \ldots & & 1 + x_ny_n \end{pmatrix}$. *On commencera par déterminer le rang de $M - I_n$.*

Solution de l'exercice: On a $M - I_n = A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & & x_2y_n \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & & x_ny_n \end{pmatrix}$. La matrice A est de rang 0 ou 1 donc $\dim(\ker(A)) \geq n-1$.
En complétant une base de $\ker(A)$ en une base de

Il existe une matrice carrée P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & z_1 \\ \vdots & & \vdots & z_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_n \end{pmatrix}$. Or $tr(A') = tr(A)$ donc $z_n = \sum_{n=1}^{n} x_iy_i$. On a $P^{-1}BP = I_n + P^{-1}AP$ donc $\det(B) = \det(P^{-1}BP) = 1 + \sum_{n=1}^{n} x_iy_i$.

Exercice 5 *(ccinp): Soit n un entier, $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,1} = i$ pour $i \in [[1,n]]$, $a_{1,j} = j$ pour $j \in [[1,n]]$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.*
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme canoniquemeent associé à A.

1. *Déterminer le rang de A et la dimension de $\ker(A)$.*
2. *A est-elle diagonalisable? Quelle est la mutiplicité de la valeur propre 0?*
3. *Déterminer le plus petit sous-espace stable par f contenant e_1.*
   On note ce sous-espace F et f_F l'endomorphisme induit par f sur F.
4. *Déterminer le spectre de f_F. En déduire le spectre de A.*
5. *Donner un polynôme non nul vérifiant $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.*

Solution de l'exercice: 1: Les colonnes C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires et si $j \geq 3$, C_j est colinéaire à C_2 donc $rg(A) = 2$.
Le théorème du rang donne $\dim(\ker(A)) + rg(A) = n$ donc $\dim(\ker(A)) = n-2$.
2: La matrice A est symétrique réelle car $a_{i,1} = i = a_{1,i}$ et si $i \neq 1$ et $j \neq 1$, $a_{i,j} = 0 = a_{j,i}$ donc A est diagonalisable.
On a $\ker(A - 0I_n) = \ker(A) \neq \{0\}$ donc 0 est valeur propre et $\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A)) = n-2$.
La matrice A est diagonalisable donc la multiplicité de 0 est égale à la dimension du sous-espace propre $E_0(A)$ donc égale à $n-2$.
3: La matrice A est diagonalisable donc son polynôme caractéristique est scindé. Soit λ et μ les deux valeurs propres restantes (comptées avec multiplicités). On a $tr(A) = 1 = (n-2)\times 0 + \lambda + \mu$ donc $\mu = 1-\lambda$.
Soit f canoniquement associé à A et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} ie_i \notin vect(e_1)$. Posons $e_2' = f(e_1)$. On a $f(e_2') = f(e_1) + \sum_{i=2}^{n} if(e_i) = e_2' + \left(\sum_{i=2}^{n} i^2\right)e_1$. On en déduit que $F = vect(e_1, e_2')$ est un plan vectoriel stable par f et, si g est l'endomorphisme induit par f sur F, on a $mat_{(e_1,e_2')}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=2}^{n} i^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.
On a $\det(B) \neq 0$ donc $F \cap \ker(f) = \{0\}$. De plus $\dim(F) + \dim(\ker(f)) = n$ donc $F \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^n$. Soit $(e_3', \ldots, e_n')$ une base de $\ker(f)$. La famille $b = (e_1, e_2'e_3', \ldots, e_n')$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $mat_b(f) = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.
On en déduit que $\chi_A(x) = \chi_f(x) = \left|\begin{array}{c|c} xI_2 - B & 0 \\ \hline 0 & xI_{n-1} \end{array}\right| = x^{n-2} \times \chi_B(x)$. Or $\chi_B(x) = x^2 - x - \sum_{i=2}^{n} i^2$ de racines $\lambda_i = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sum_{i=2}^{n} i^2}}{2}$, $i \in \{1,2\}$. On a bien $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$.

4: A est diagonalisable donc $\prod_{\lambda \in sp(A)} (X-\lambda)$ est un polynome annulateur de A donc
$X(X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X\left(X^2 - X - \sum\limits_{i=2}^{n} i^2\right)$ est un polynome annulateur de A.

Exercice 6 *CCINP PSI 21: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par*

$$f(M) = aM + bM^T.$$

1. *Vérifier que f est un endomorphisme.*
2. *Montrer que f est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).*
   (a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
4. *Déterminer la trace et le déterminant de f.*

Solution de l'exercice: 1: La transposition est linéaire donc f est linéaire.
2: Si $b=0$, $f = a\ id$ donc f est diagonalisable et $sp(f) = \{a\}$.
Si M est symétrique alors $M^T = M$ donc $f(M) = (a+b)M$ donc $a+b$ est valeur propre et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset E_{a+b}(f)$.
Si M est antisymétrique alors $M^T = -M$ donc $f(M) = (a-b)M$ donc $a-b$ est valeur propre et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset E_{a-b}(f)$.
On sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \oplus \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc $\dim(E_{a+b}(f)) + \dim(E_{a-b}(f)) \geq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc f est diagonalisable et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = E_{a+b}(f)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = E_{a-b}(f)$ et il n'y a pas d'autres valeurs propres car la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
3: On sait que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc si b est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et b' une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors (b, b') est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice de f dans cette base est diagonale et en calculant la trace de la matrice A de f dans cette base, on obtient
$tr(f) = \dfrac{n(n+1)}{2}(a+b) + \dfrac{n(n-1)}{2}(a-b)$ et $\det(f) = (a+b)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a-b)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (valable aussi si $b=0$).

Exercice 7 *Soit A une matrice carrée de taille n inversible. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A^{-1} = P(A)$.*

Solution de l'exercice: La matrice A admet un polynôme annulateur non nul Q. Posons $Q = \sum\limits_{i=0}^{d} a_i X^i$.
Si $a_0 \neq 0$, alors $a_0 I_n = -\sum\limits_{i=1}^{d} a_i A^i$ donc $a_0 I_n = A \times -\frac{1}{a_0}\sum\limits_{i=1}^{d} a_i A^{i-1} = A \times P(A)$ avec $P = -\frac{1}{a_0}\sum\limits_{i=0}^{d-1} a_{i+1} A^i$. Si $a_0 = 0$. $Q = \sum\limits_{i=k}^{d} a_i X^i$. avec $a_k \neq 0$. On a $\sum\limits_{i=k}^{d} a_i A^i = 0$ donc $A^k \sum\limits_{i=k}^{d} a_i A^{i-k} = 0$. Or donc A^k est inversible donc $\sum\limits_{i=k}^{d} a_i A^{i-k} = 0$ donc $R(A) = 0$ avec $R = \sum\limits_{i=0}^{d-k} b_i A^i$ avec $b_i = a_{i+k}$ et donc $b_0 \neq 0$ et on est ramené au cas déjà traité.

Exercice 8 *Centrale PSI 21: Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

1. *La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables?*

2. *Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $c>0$ tel que $\forall z\in\mathbb{C}$, $|P(z)|\geq c\,|\mathrm{Im}(z)|^n$.*

3. *Soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice A. Montrer que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Solution de l'exercice: 1: On a $sp(T)=\{1\}$ donc si T était diagonalisable, elle serait semblable à I_3 donc égale à I_3, ce qui n'est pas le cas donc T n'est pas diagonalisable.
Soit $T_k=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1+\frac{1}{k} & 2\\ 0 & 0 & 1+\frac{2}{k}\end{pmatrix}$ On a $sp(T_k)=\left\{1,1+\frac{1}{k},1+\frac{2}{k}\right\}$ donc T_k est diagonalisable et on a bien $\lim\limits_{k\to+\infty}T_k=T$.
2: Supposons qu'il existe $c>0$ tel que $\forall z\in\mathbb{C}$, $|P(z)|\geq c\,|\mathrm{Im}(z)|^n$. Si $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors $|\mathrm{Im}(z)|>0$ donc $|P(z)|>0$ donc P n'admet pas de racines complexes non réelles donc est scindé sur $\mathbb{R}$.
Supposons que P est scindé sur $\mathbb{R}$ de décomposition en irréductibles $P=\lambda\prod\limits_{i=1}^{k}(X-a_i)^{\alpha_i}$ avec $a_i\in\mathbb{R}$. On a $|P(z)|=\left|\lambda\prod\limits_{i=1}^{k}(z-a_i)^{\alpha_i}\right|=|\lambda|\prod\limits_{i=1}^{k_i}|z-a_i|^{\alpha_i}$ Posons $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
On a $|z-a_i|=|(x-a_i)+iy|\geq|y|$ donc $\forall z\in\mathbb{C}$, $|P(z)|\geq c\,|\mathrm{Im}(z)|^n$ où c est la valeur absolue du coefficient dominant de P.
3: Soit $z\in\mathbb{C}$. On a, par continuité du déterminant, $\chi_{A_k}(z)=\det(zI_n-A_k)\to_{k\to+\infty}\det(zI_n-A)=\chi_A(z)$. Or $\left|\chi_{A_k}(z)\right|\geq|\mathrm{Im}(z)|^n$ donc par passage à la limite quand k tend vers l'infini, donc $|\chi_A(z)|\geq|\mathrm{Im}(z)|^n$ donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 *Centrale: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, deux endomorphismes non nuls f et g de E et un scalaire $\alpha\neq0$ vérifiant $f\circ g-g\circ f=\alpha f$. Calculer $f^k\circ g-g\circ f^k$ pour $k\in\mathbb{N}^*$. En déduire que f est un endomorphisme nilpotent (On pourra poser $\phi(f)=f\circ g-g\circ f$).*

Solution de l'exercice: On a $f^2\circ g-g\circ f^2=(f^2\circ g-f\circ g\circ f)+(f\circ g\circ f-g\circ f^2)=f\circ(f\circ g-g\circ f)+(f\circ g-g\circ f)\circ f$ donc $f^2\circ g-g\circ f^2=f\circ\alpha f+\alpha f\circ f=2\alpha f^2$. Supposons $f^k\circ g-g\circ f^k=k\alpha f^k$, montrons $f^{k+1}\circ g-g\circ f^{k+1}=(k+1)\,\alpha f^{k+1}$. On a $f^{k+1}\circ g-g\circ f^{k+1}=\left(f^{k+1}\circ g-f^k\circ g\circ f\right)+\left(f^k\circ g\circ f-g\circ f^{k+1}\right)=f^k\circ(f\circ g-g\circ f)+\left(f^k\circ g-g\circ f^k\right)\circ f$ donc $f^{k+1}\circ g-g\circ f^{k+1}=f^k\circ\alpha f+k\alpha f^k\circ f=(k+1)\,\alpha f^{k+1}$. On a donc, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f^k\circ g-g\circ f^k=k\alpha f^k$. Considérons l'application ϕ de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(u)=u\circ g-g\circ u$. On vérifie que ϕ est linéaire. Par ailleurs pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\phi\left(f^k\right)=k\alpha f^k$. Si l'endomorphisme f^k est non nul, c'est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre $k\alpha$. Or ϕ admet un nombre fini de valeurs propres car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie donc il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $f^k=0$.

Exercice 10 *ENS PSI 21: Soit $n\geq2$. On appelle pseudo-inverse de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant:*

$$AB=BA\ ,\ A=ABA\ \textit{et}\ B=BAB$$

Pour toute matrice A, on note a l'endomorphisme canoniquement associé.

1. *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $rg(a)=rg(a^2)=r$. Montrer que $\mathbb{R}^n=\ker(a)\oplus\mathrm{Im}(a)$. Montrer qu'il existe $C\in\mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ et $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A=P\left(\begin{array}{c|c}C & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)P^{-1}$.*

2. *Montrer que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un pseudo-inverse si et seulement si $rg(a)=rg(a^2)$.*

3. *Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant un pseudo-inverse B et b l'endomorphisme canoniquement associé.à B.*

   (a) *Montrer que $a\circ b$ est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image.*

(b) *Montrer que A admet un unique pseudo-inverse que l'on notera A^+.*

(c) *Montrer que A^+ est un polynôme en A.*

4. *On suppose que A^+ existe et que $(\mathrm{Im}\,(a))^{\perp} = \ker(a)$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le vecteur A^+y minimise la fonction $f : x \mapsto \|Ax - y\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'il est le vecteur de norme minimale parmi tous les vecteurs qui minimise f.*

Solution de l'exercice: 1: Montons $\ker(a) \cap \mathrm{Im}\,(a) = \{0\}$. Si $x \in \ker(a) \cap \mathrm{Im}\,(a)$ alors $\exists t \in \mathbb{R}^n, x = a(t)$ et $a(x) = a^2(t) = 0$ On en déduit que $t \in \ker(a^2)$ Or $\ker(a) \subset \ker(a^2)$ et $rg(a) = rg(a^2)$ donc (th du rang) $\dim(\ker(a)) = \dim(\ker(a^2))$ donc $\ker(a) = \ker(a^2)$ donc $t \in \ker(a)$ donc $x = 0$ donc $\ker(a) \cap \mathrm{Im}\,(a) = \{0\}$. Le théorème du rang entraîne que $\mathbb{R}^n = \ker(a) \oplus \mathrm{Im}\,(a)$. Soit $\mathcal{B}_0$ une base de $\ker(a)$ et $\mathcal{B}_1$ une base de $\mathrm{Im}\,(a)$. La famille $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et dans cette base, la matrice de a est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ avec $C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$
On a donc $rg(a) = rg(C) = r$ donc C est inversible.
2: Supposons que A admet un pseudo-inverse B. On a $AB = BA$, $A = ABA$ donc $A = A^2B$ Or $rg(MN) \leq rg(M)$ donc $rg(A) \leq rg(A^2)$. On sait que $\mathrm{Im}\,(a^2) \subset \mathrm{Im}\,(a)$ donc $rg(A^2) \leq rg(A)$ donc $rg(A) = rg(A^2)$.
Supposons que $rg(a) = rg(a^2)$. Soit $C \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1}$. Posons $B = P\left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1}$. Des relations $\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, on déduit que $AB = BA$, $A = ABA$ et $B = BAB$.
3a: On a $B = BAB$ donc $BA = AB = ABAB = (AB)^2$ donc $a \circ b = b \circ a$ est un projecteur. On a $\mathrm{Im}\,(a \circ b) \subset \mathrm{Im}\,(a)$. De plus $a = (a \circ b) \circ a$ donc $\mathrm{Im}\,(a) \subset \mathrm{Im}\,(a \circ b)$ donc $\mathrm{Im}\,(a \circ b) = \mathrm{Im}\,(a)$. De plus $\ker(a) \subset \ker(b \circ a)$ donc (th du rang) $\ker(a) = \ker(a \circ b)$.
3b: Soit $x \in \ker(a)$. On a $B = BAB = B^2A$ donc $b(x) = 0$.
Soit $x \in \mathrm{Im}\,(a)$. On $\ker(a) \cap \mathrm{Im}\,(a) = \{0\}$ donc a induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}\,(a)$ donc $\exists t \in \mathrm{Im}\,(a)$, $x = a(t)$ et donc $\exists u \in \mathrm{Im}\,(a)$, $t = a(u)$
Or $AB = BA$ donc $b(x) = b(a(t)) = b \circ a \circ a(t') = a \circ b \circ a(t') = a(t') = t$. Il existe un et un seul endomorphisme dont les restrictions à deux sous-espaces supplémentaires soient fixés donc B est unique.
Autre méthode: D'après a: $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}\,(a) \oplus \ker(a)$ et dans une base adaptée, $mat(a) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ et $mat(b) = \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline H & 0 \end{array}\right)$ et $a \circ b = b \circ a$ projecteur sur $\mathrm{Im}\,(a)$ parallèlement à $\ker(b)$ donc $EG = I_r = GE$ et $HE = 0$ donc E inversible et $G = E^{-1}$ et $H = 0$.
3c: On reprend les notations de Q2. La matrice C admet un polynôme annulateur $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$. On peut supposer que $a_0 \neq 0$ car C et est inversible donc on peut multiplier par C^{-1} autant de fois que nécessaire l'égalité $a_0I_r + a_1C + \cdots + a_kC^k = 0$. On en déduit que $I_r = \frac{-1}{a_0}\left(a_1C + \cdots + a_kC^k\right) = C \times \underbrace{\frac{-1}{a_0}\left(a_1I_r + \cdots + a_kC^{k-1}\right)}_{C^{-1}}$ donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $C^{-1} = Q(C)$. On en déduit (calcul par blocs) que
$\left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = Q\left(\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\right)$ puis que $A^+ = B = Q(A)$.
4: On a $\left\{\|Ax - y\|^2, x \in \mathbb{R}^n\right\} = \left\{\|z - y\|^2, z \in \mathrm{Im}\,(a)\right\}$.et $\inf_{z \in \mathrm{Im}(a)} \|z - y\|^2 = \|p(y) - y\|^2$ ou p est le projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Im}\,(a)$.
Si $x = A^+y$, alors , $\|Ax - y\|^2 = \|AA^+y - y\|^2$ et AA^+y est le projeté de y sur $\mathrm{Im}\,(a)$ parallèlement à $\ker(a)$. Or $(\mathrm{Im}\,(a))^{\perp} = \ker(a)$ donc AA^+y est le projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Im}\,(a)$ donc $x = A^+y$ minimise f sur $\mathbb{R}^n$.
De plus, $\|Ax - y\|^2 = \|AA^+y - y\|^2 \Leftrightarrow Ax = AA^+y$ car si $z \in \mathrm{Im}\,(a) \neq p(y) = AA^+y$, alors $\|z - y\| > \|p(y) - y\|$ donc les éléments x qui minimisent f vérifient $Ax = AA^+y$ soit $A(x - A^+y) = 0$ donc $x - A^+y \in \ker(a)$ donc $\exists t \in \ker(a)$, $x = A^+y + t$. Or $(\mathrm{Im}\,(a))^{\perp} = \ker(a)$ et $\mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Im}\,(a^+)$ (utiliser par exemple $A = A^+A^2$ et $A^+ = A(A^+)^2$) donc $\|x\|^2 = \|A^+y\|^2 + \|t^2\|$ de norme minimum pour $t = 0$ donc pour $x = A^+y$.