Vendredi 16 mai 2025

Exercice 1 *(Ccp): Soit* (u_n), (v_n), (w_n) *et* (x_n) *des suites réelles vérifiant, pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n) \end{array}\right. .$$

1. *Ecrire ces relations sous forme vectorielle* $X_{n+1} = AX_n$.
2. *La matrice* A *est-elle diagonalisable? Montrer que* 1 *est valeur propre de* A. *Déterminer les éléments propres de* A.
3. *A quelle condition les suites* (u_n), (v_n), (w_n) *et* (x_n) *convergent toutes vers* 0*?*

Solution de l'exercice:

1: On pose $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ x_n \end{pmatrix}$. La relation de récurrence est $X_{n+1} = AX_n$.

2: La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux .

Le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Valeurs propres méthode 1:

On vérifie par le calcul que$A^2 = \frac{6}{5}A - \frac{1}{5}I_n = 0$ donc $(X-1)\left(X - \frac{1}{5}\right) = X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{1}{5}$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $sp(A) \subset \left\{1, \frac{1}{5}\right\}$.

Valeurs propres méthode 2: $A = \dfrac{1}{5}(I_4 + J)$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $JU = U$ et $rg(J) = 1$ donc $\dim(E_0(J)) = 3$ donc $sp(J) = \{0, 1\}$

Or $JX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \frac{\lambda+1}{5}X$ donc $sp(A) = \left\{1, \frac{1}{5}\right\}$

On recherche les sous-espaces propres par la résolution de $AX = \lambda X$ (on peut aussi raisonner sur J).

On trouve que $E_1(A) = vect(U)$ et que $H = E_{\frac{1}{5}}(A)$ est l'hyperplan d' équation $x + y + z + t = 0$

Les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) convergent vers 0 si et seulement si la suite (X_n) converge vers $0_{\mathbb{R}^4}$.

On a $\mathbb{R}^4 = vect(U) \oplus H$. Posons $X_0 = Y_0 + Z_0$ avec $(Y_0, Z_0) \in vect(U) \times H$. On a $X_n = A^n X_0 = A^n(Y_0 + Z_0) = A^n Y_0 + A^n Z_0 = Y_0 + \dfrac{1}{5^n}Z_0 \to_{n\to+\infty} Y_0$. Les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) convergent vers 0 si et seulement si $Y_0 = 0_{\mathbb{R}^4}$ c'est-à-dire $X_0 \in H$ soit $u_0 + v_0 + w_0 + x_0 = 0$.

Exercice 2 *(C):*

1. *Diagonaliser* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
2. *Donner* 4 *solutions de l'équation* $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. *Existe-t-il d'autres solutions de l'équation précédente?*

Solution de l'exercice:
1: On remarque que $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ donc 1 et 2 sont valeurs propres de A donc A est diagonalisable et $sp(A)=\{1,2\}$.
On a donc $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=D$ avec $P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.
2 Posons $\Delta=\begin{pmatrix}\pm\sqrt{1}&0\\0&\pm\sqrt{2}\end{pmatrix}$. On a $\Delta^2=D$. Posons $M=P\Delta P^{-1}$. On a $M^2=\left(P\Delta P^{-1}\right)^2=P\Delta^2P^{-1}=A$. On obtient 4 matrices.
3: Rappel: si u et v sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E vérifiant $u\circ v=v\circ u$ alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Supposons $M^2=A$. On a $AM=M^3=MA$ donc les sous espaces propres de A sont stables par M.
Posons $\Delta=P^{-1}MP$. D'après le rappel Δ est diagonale donc on retombe sur les quatre matrices obtenues en 2.

Exercice 3 *mines telecom: Soit $z\in\mathbb{C}$ et* $M(z)=\begin{pmatrix}0&0&z\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1. La matrice $M(z)$ a-t-elle des valeurs propres multiples?
2. A quelle condition la matrice $M(z)$ est-elle diagonalisable?
3. Démontrer que si $M(z)$ admet une valeur propre de module supérieur ou égale à 1, alors $|z|\geq\frac{1}{2}$.
4. Montrer que si $|z|$ est assez petit, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(M(z)^n\right)=0$.

Solution de l'exercice: Q1: $M(z)=\begin{pmatrix}0&0&z\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$ admet $P=X^3-zX-z$ comme polynôme caractéristique.
Le scalaire λ est racine multiple de P ssi $\begin{cases}P(\lambda)=0\\P'(\lambda)=0\end{cases}:(S)$.
Or $(S)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^3-z\lambda-z=0\\3\lambda^2=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda^3+3\lambda^2=0\\3\lambda^2=z\end{cases}\Leftrightarrow(\lambda=0$ et $z=0)$ ou $(\lambda=-\frac{3}{2}$ et $z=\frac{27}{4})$. On vérifie que dans le premier cas, $\lambda=0$ est racine triple tandis que dans le deuxième, $P''(\lambda)\neq0$ donc la racine est double.
Q2: Si $z\notin\left\{0,\frac{27}{4}\right\}$, alors la matrice $M(z)$ admet 3 valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable. La matrice $M(0)$ admet 0 comme unique valeur propre. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas donc $M(0)$ n'est pas diagonalisable. Dans le cas ou $z=\frac{27}{4}$, déterminons la dimension de $E_{-\frac{3}{2}}$. La matrice $M\left(\frac{27}{4}\right)+\frac{3}{2}I_3=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&\frac{27}{4}\\1&\frac{3}{2}&0\\1&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ donc $rg\left(M\left(\frac{27}{4}\right)+\frac{3}{2}I_3\right)\geq2$ (on trouve exactement 2 par la méthode de Gauss) donc $\dim\left(E_{-\frac{3}{2}}\right)\leq1$. On en déduit que $\dim\left(E_{-\frac{3}{2}}\right)=1<2=m\left(-\frac{3}{2}\right)$ (multiplicité) donc $M\left(\frac{27}{4}\right)$ n'est pas diagonalisable.
3: Soit λ soit une valeur propre de $M(z)$. On a donc $z(\lambda+1)=\lambda^3$ donc en particulier, $\lambda\neq-1$ et $z=\frac{\lambda^3}{\lambda+1}$. Si $|\lambda|\geq1$ alors $|\lambda|^3\geq|\lambda|\geq1$ donc $2|\lambda|^3\geq|\lambda|+1\geq|\lambda+1|$ donc $|z|\geq\frac{1}{2}$.
4: On vérifie que $M(0)^3=0$ donc si $n\geq3$, $M(0)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(M(0)^n\right)=0$.
Si $0<|z|<\frac{1}{2}$ alors, d'après 2, la matrice $M(z)$ est diagonalisable et d'après 3, ses valeurs propres vérifient $|\lambda|<1$.
Soit $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}=P^{-1}M(z)P$ une matrice diagonale semblable à $M(z)$. On a $D^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&\lambda_3^n\end{pmatrix}$ et $M(z)^n=PD^nP^{-1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(M(z)^n\right)=0$.

Exercice 4 *(IMT) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_1$ associe la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $D_1, \ldots D_n$ avec $D_i = \sum\limits_{1 \leq k \leq n, k \neq i} C_k$. Montrer que φ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Solution de l'exercice:

Soit $E_1, \ldots E_n$ les colonnes de $\varphi \circ \varphi(M)$ On a $E_i = \sum\limits_{1 \leq k \leq n, k \neq i} D_k = (n-1) C_i + (n-2) \sum\limits_{1 \leq k \leq n, k \neq i} C_k$.car C_i est présent dans tous les D_k tandis que C_j pour $j \neq i$ est présent dans tous les D_k sauf D_j. On en déduit que $E_i = (n-1) C_i + (n-2) D_i$ donc $\varphi \circ \varphi(M) = (n-1) \varphi(M) + M$ donc $\varphi \circ \varphi(M) - (n-1) \varphi(M) - (n-2) id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M) = 0$ donc $\varphi \circ \varphi - (n-1) \varphi - (n-2) id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0$ car l'égalité précédente est vraie pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme $X^2 - (n-1) X - (n-2) = (X+1)(X-(n-2))$ est un polynôme annulateur de φ scindé à racines simples donc est diagonalisable.

Exercice 5 *(ccinp 2014) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose que $sp(A) \cap sp(B) = \emptyset$.*

1. *Montrer que $\chi_A(B)$ est une matrice inversible.*
2. *Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AX = XB \Rightarrow X = 0$.*
3. *Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = AX - XB$.*

Solution de l'exercice

1. première méthode: Le polynôme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Posons $\chi_A = \prod\limits_{\lambda \in sp(A)} (X-\lambda)^{m(\lambda)}$. On a $\chi_A(B) = \prod\limits_{\lambda \in sp(A)} (B - \lambda I_n)^{m(\lambda)}$ et
   et $(B - \lambda I_n)$ est inversible car λ n'est pas valeur propre de B donc $\chi_A(B)$ est inversible.
   deuxième méthode:Toute matrice carrée complexe est trigonalisable donc il existe P inversible et T triangulaire supérieure $T = P^{-1}BP$. On a $T^k = P^{-1}B^kP$ donc $\chi_A(T) = P^{-1}\chi_A(T)P$. La matrice $\chi_A(T)$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les $\chi_A(t_{i,i})$. Or $sp(B) = sp(T) = \{t_{i,i}\}$ et $sp(A) \cap sp(B) = \emptyset$ donc $\chi_A(t_{i,i}) \neq 0$. Une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls est inversible donc $\chi_A(T)$ est inversible donc $\chi_A(B)$ est inversible.
2. Supposons $AX = XB$. On a$A^2X = XB \Rightarrow AAX = AXB = XBB = XB^2$. Par récurrence, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kX = XB^k$ et par combinaison linéaire, pour tout $Q \in \mathbb{C}[\mathbb{X}]$, $Q(A)X = XQ(B)$. En particulier, $\chi_A(A) \times X = X \times \chi_A(B)$. Or $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton) donc $X \times \chi_A(B) = 0$ en multipliant à gauche par l'inverse de $\chi_A(B)$, on en déduit que $X = 0$.
3. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(X) = AX - XB$. On vérifie que φ est linéaire. D'après la question 2, φ est injective. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie donc φ est un isomorphisme. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une et une seule matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\varphi(X) = M$.

Exercice 6 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $4A^2 + 2A + I_n = 0$.*

1. *La matrice A est-elle diagonalisable?*
2. *Calculer* $\det(A)$ *et $tr(A)$.*

Solution de l'exercice

1: Soit $P = 4X^2 + 2X + 1$ admet deux racines complexes distinctes $z = \dfrac{-1 \div \sqrt{3}}{4}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \left\{\frac{1}{2}j, \frac{1}{2}\bar{j}\right\}$.
De plus $sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 *Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.*

1. *Si $\mathcal{A}$ est diagonalisable et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $\mathrm{P}(\mathcal{A})$ est diagonalisable.*

2. *Si A est diagonalisable à valeurs propres distinctes, quelles sont les matrices inversibles U telles que $U^{-1}AU$ est diagonale?*

3. *Si A et B sont simultanément diagonalisables, et que les valeurs propres de B sont toutes distinctes, montre qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$.*

4. *Si A et B sont simultanément diagonalisables, montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et deux polynômes P_A et P_B dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $A = P_A(C)$ et $B = P_B(C)$.*

5. *La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle un carré dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?*

6. *Montrer, si A est inversible, que A diagonalisable $\Longleftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k\right.$ diagonalisable $\left.\right)$.*

Solution de l'exercice:

1: Si A est diagonalisable, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$. Par une récurrence classique, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = QD^kQ^{-1}$ donc, si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k Q D^k Q^{-1} = Q\left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k D^k\right) Q^{-1} = QD'Q^{-1}$ avec $D' = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k D^k$ diagonale donc, par définition, $P(A)$ est diagonalisable.

2. Si A est diagonalisable à valeurs propres distinctes, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de A et notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Soit $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{C}^n$ telle que U soit la matrice de passage entre la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{C}^n$ et la base $\mathcal{B}$.

Par la formule de changement de base, $mat_{\mathcal{B}}(\mathfrak{u}) = U^{-1}AU$ donc $U^{-1}AU$ est diagonale si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

Notons $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Comme les valeurs propres sont distinctes, les seuls vecteurs propres de u sont des vecteurs non nuls colinéaires à l'un des v_k car tous les sous-espaces propres sont des droites. Ainsi, une matrice inversible $u \in GL_n(\mathbb{C})$ vérifie $\mathrm{U}^{-1}\mathrm{AU}$ diagonale si et seulement s'il existe une permutation σ de $[[1;n]]$ et des complexes non nuls $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ tels que $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}\left(\alpha_1 v_{\sigma(1)}, \cdots, \alpha_n v_{\sigma(n)}\right)$.

3. Si A et B sont simultanément diagonalisables, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = Q'Q^{-1}$ avec D et D' diagonales. Si les valeurs propres de B sont toutes distinctes, notons-les $\beta_1, \cdots, \beta_n$, on peut choisir Q de sorte que $D' = \operatorname{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$. Si on note alors $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, et qu'on prend l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [[1;n]], P(\beta_k) = \alpha_k$, on a donc $P(D') = \operatorname{diag}(P(\beta_1), \cdots, P(\beta_n)) = D$ donc, puisque $P(B) = QP(D')Q^{-1}$ comme en a., on trouve bien $A = QDQ^{-1} = QP(D')Q^{-1} = P(B)$.

4. Si A et B sont simultanément diagonalisables, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = QD'Q^{-1}$ avec D et D' diagonales. Posons $\Delta = \operatorname{diag}(1, 2, \cdots, n)$ et $C = Q\Delta Q^{-1}$. D'après **Q3**., comme les valeurs propres de C sont distinctes et que A et C sont simultanément diagonalisables, il existe $P_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P_A(C)$. De même, comme les valeurs propres de C sont distinctes et que B et C sont simultanément diagonalisables, il existe $P_B \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P_B(C)$.

5 Les valeurs propres de A sont -1 et -4 . S'il existait une matrice $R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$ et si on note λ une valeur propre complexe de R (il en existe d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS), alors λ^2 est valeur propre de R donc de A et $\lambda \in \{i, -i, 2i, 2i\}$.

Mais comme R est une matrice réelle, si $\lambda \in Sp(R)$, alors $\bar{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(R) = \{i, -i\}$ ou $\mathrm{Sp}(R) = \{2i, -2i\}$.

Si $\mathrm{Sp}(R) = \{i, -i\}$ alors $\det(R) = i \times (-i) = 1$ donc $\det(R^2) = 1 \neq \det(A)$

Si $\mathrm{Sp}(R) = \{2i, -2i\}$ alors $\det(R) = 2i \times (-2i) = 4$ donc $\det(R^2) = 14 \neq \det(A)$

donc $R^2 \neq A$. La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ n'est pas un carré dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.
($\Longrightarrow$) Si A est diagonalisable, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = X^k(A)$ est diagonalisable d'après la question a.. On a donc $\left(\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k\right.$ est diagonalisable et même $\forall k \in \mathbb{N}^*$, A^k est diagonalisable.
($\Longleftarrow$) S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A^k est diagonalisable, en notant $\mu_1, \cdots, \mu_r$ les valeurs propres distinctes (et non nulles car A^k est aussi inversible) de A^k, on sait que $P = \prod\limits_{i=1}^{r}(X - \mu_i)$ est annulateur de A^k donc $\prod\limits_{i=1}^{r}\left(A^k - \mu_i I_n\right) = 0$ ce qui s'écrit aussi $\prod\limits_{i=1}^{r}\prod\limits_{p=0}^{k-1}(A - \delta_i\omega_k^p I_n) = 0$ en notant δ_i une des racines k-ième de μ_i dans $\mathbb{C}$ et $\omega_k = e^{\frac{2i\pi}{k}}$. Ainsi, le polynôme $P = \prod\limits_{i=1}^{r}\prod\limits_{p=0}^{k-1}(X - \delta_i\omega_k^p)$ est annulateur de A et scindé à racines simples car $\forall i \in [[1;r]], \forall (p,p') \in [[0;k-1]], p \neq p' \Longrightarrow \delta_i\omega_k^p \neq \delta_i\omega_k^{p'}$ car $\delta_i \neq 0$ et $\forall (i,i') \in [[1;r]]^2, \forall (p,p') \in [[0;k-1]]^2, i \neq i' \Longrightarrow \delta_i\omega_k^p \neq \delta_{i'}\omega_k^{p'}$ car $\delta_i^k = \mu_i \neq \mu_{i'} = \delta_{i'}^k$. Ainsi, la matrice A est diagonalisable.
Par double implication, si A est inversible, on a A diagonalisable $\Longleftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k \text{ diagonalisable }\right)$.

Exercice 8 *Centrale*

1. *Soit E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie et deux applications linéaires $u \in \mathcal{L}(E,G)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$.*

   (a) *Montrer qu'il existe une application linéaire $w \in \mathcal{L}(F,G)$ vérifiant $u = w \circ v$ si et seulement si $\ker(v) \subset \ker(u)$.*

   (b) *On suppose qu'il existe une application linéaire $w_0 \in \mathcal{L}(F,G)$ vérifiant $u = w_0 \circ v$.*
   Déterminer toutes les applications $w \in \mathcal{L}(F,G)$ vérifiant $u = w \circ v$.

2. *Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche les solutions $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation $A = CB$.*

   (a) *Montrer qu'il existe une solution à cette équation.*

   (b) *On pose $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que B_0 est inversible et que $C_0 = AB_0^{-1}$ est solution de l'équation.*

   (c) *Déterminer toutes les solutions de l'équation. On pourra donner les solutions sous forme matricelle avec des coefficients "variables".*

Solution de l'exercice:
1a: Si $u = w \circ v$ alors $\ker(v) \subset \ker(u)$.
Réciproquement. Posons $r = rg(v)$. supposons $\ker(v) \subset \ker(u)$. Soit $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\ker(v)$ complétée en $(e_1, \ldots, e_n)$ base de E.
Montrons la famille $(v(e_{k+1}), \ldots, v(e_n))$ est libre. Soit $H = vect(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. On a $\ker(v) \oplus H = E$ donc $H \cap \ker(v) = \{0\}$. On en déduit que l'application $v_{|H}$ est injective donc $(v(e_{k+1}), \ldots, v(e_n))$ est libre.
Deux applications linéaires sont égales ssi elles coïncident sur les éléments d'une base de l'ev de départ.
On veut trouver $w \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $\forall i \in [|1,n|]$, $w(v(e_i)) = u(e_i)$.
Ces égalités sont automatiquement vérifiées pour $i \geq r+1$ car $\ker(v) \subset \ker(u)$.
Posons $f_i = v(e_i)$.pour $i \in [[1,r]]$ et complétons la famille $(f_1, \ldots, f_r)$ en une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de f.

Posons $w(f_i) = \begin{cases} u(e_i) & \text{si } i \in [|1,r|] \\ 0 \text{ si } i \in [|r+1,p|] \end{cases}$ (une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'ev de départ).
On a bien $\forall i \in [|1,r|]$, $w(v(e_i)) = w(f_i) = u(e_i)$ donc $u = w \circ v$.
1b: Supposons $\ker(v) \subset \ker(u)$ et $u = w_0 \circ v$. On a $u = w \circ v \Leftrightarrow w \circ v = w_0 \circ v \Leftrightarrow (w - w_0) \circ v \Leftrightarrow \mathrm{Im}(v) \subset \ker(w - w_0)$. On a donc w solution si et seulement si il existe $w' \in \mathcal{L}(F,G)$ tel que $w = w_0 + w'$ avec $\mathrm{Im}(v) \subset \ker(w')$.

2a: On a $\ker(A) = \ker(B) = vect(V)$ avec $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc d'après 1a, il existe une solution.

2b: La matrice B_0 est inversible et $B_0^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = E_1$, premier vecteur de la base canonique et $B_0^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = E_2$, vecteur de la base canonique. On en déduit $B_0^{-1}BE_1 = E_1$ et $B_0^{-1}BE_2 = E_2$ donc $AB_0^{-1}BE_1 = AE_1$ et $AB_0^{-1}BE_2 = AE_2$. Par ailleurs $AB_0^{-1}BV = 0 = AV$.
La famille (E_1, E_2, V) est une base (prendre le déterminant de cette famille dans la base canonique par exemple) de $\mathbb{R}^3$ donc $AB_0^{-1}B = A$ et donc $C_0 = AB_0^{-1}$ vérifie $A = C_0B$.
2c: Une solution quelconque est de la forme $C_0 + C'$ avec $\mathrm{Im}(B) \subset \ker(C')$.
On peut donner la forme d'une matrice C' quelconque.
On a $\mathrm{Im}(B) = vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$. En posant $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Im}(B) \subset \ker(C')$ si et seulement si $P^{-1}C'P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ donc C' est de la forme $P\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$ avec (a,b,c) quelconque.
On obtient après calcul.$C' = \begin{pmatrix} 2a & 4a & 2a \\ b-a & 2b-2a & b-a \\ c-2b & 2c-4b & c-2b \end{pmatrix}$ avec (a,b,c) quelconque.

Exercice 9 *(Centrale 2018): Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. On note E_x l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant x comme vecteur propre. Montrer que E_x est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.*

Solution de l'exercice: La matrice nulle est élément de E_x. Soit $(A,B) \in E_x^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. tels que $Ax = \lambda x$ et $Bx = \mu x$. Soit t et u deux réels. On a $(tA + uB)x = tAx + uBx = (t\lambda + u\mu)x$ donc $tA + uB \in E_x$ donc E_x est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On complète x en une base b de $\mathbb{R}^n$ et on considère la matrice $P = P_{b_0}^b$ ou b_0 est la base canonique. L'application $\phi : M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi(E_x)$ est l'ensemble E des matrices M telles que $m_{i,1} = 0$ pour tout $i \geq 2$. On a $\dim(E_x) = \dim(E) = 1 + n \times (n-1)$ (E est engendré par des matrices élémentaires).