Mercredi 14 mai 2025 matin

Exercice 1 *(ccinp) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des matrice $P(A)$ où P est un polynôme à coefficients réels quelconque.*

1. *Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un espace vectoriel de dimension finie.*
2. *Citer le théorème de Calyley-Hamilton. En déduire que* $\dim(\mathbb{R}[A]) \leq n$.

   Dans la suite de l'exercice, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. *Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Montrer que $\mathbb{R}[A] = vect(I_3, A, A^2)$.*
5. *Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA\} = \mathbb{R}[A]$.*

Solution de l'exercice:

On utilisera dans cet exercice Si P et Q sont des polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$ $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$ et $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$

1: On a $\mathbb{R}[A] \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $O \in \mathbb{R}[A]$

Soit $M \in \mathbb{R}[A]$.et $N \in \mathbb{R}[A]$. Il existe P et Q polynômes tels que $M = P(A)$ et $N = Q(A)$.

Si λ et μ sont des réels, $\lambda M + \mu N = \lambda P(A) + \mu Q(A) = (\lambda P + \mu Q)(A) \in \mathbb{R}[A]$.

On en déduit que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie n^2 donc est de deimension finie.

2: Montrons que pour tout polynôme P, $P(A) \in vect(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$.

Posons $P = \chi_A Q + R$ avec $\deg(R) < n-1$ (division euclidienne de P par χ_A)

donc $P(A) = (\chi_A Q + R)(A) = \chi_A(A) Q(A) + R(A) = R(A)$ car $\chi_A(A) = 0$. donc $P(A) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \in vect(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ car $\deg(R) \leq n-1$.

3 Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$. On a $M = I_3 + J$ et $I_3 J = J I_3$ donc $M^n = (I_3 + J)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} J^i \times I_3^{n-i}$.

donc $M^0 = I_3$, $M^1 = I_3 + J$ et si $n \geq 2$, $M^n = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} J^i \times I_3^{n-i} = I_3 + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2 =. \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4: D'après la question précédente, $F \subset vect(I_3, J, J^2) = G$. La famille (J, J^2) est libre et I_3 n'est pas combinaison linéaire de J et J^2 donc la famille (I_3, J, J^2) est libre.

Dans $G = vect(I_3, J, J^2)$.

La matrice de la famille (I_3, M, M^2) de G dans la base (I_3, J, J^2) de G est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 3 donc P est inversible donc (I, M, M^2) est une base de G donc $G = vect(I, M, M^2) \subset F$ donc $G = F$ et (I_3, J, J^2) est une base de F.

5: Soit $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ On a $AM = MA \Leftrightarrow (I_3 + J) M = M (I_3 + J) \Leftrightarrow MJ = JM$. (cette remarque permet de simplifier un peu les calculs car J est plus simple que A mais n'est pas indispensable)

Or $AJ=\begin{pmatrix}0 & a & a+d\\ 0 & b & b+e\\ 0 & c & c+f\end{pmatrix}$ et $JA=\begin{pmatrix}b+c & e+f & h+i\\ c & f & i\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc

$AJ=JA\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} c=0, b+c=0, c+f=0, b=f \text{ (ce qui équivaut à } c=b=f=0) : L_1\\ a=e+f, a+d=h+i, b+e=i \text{ (ce qui équivaut compte tenu de } L_1 \text{ à } a=e=i \text{ et } d=h\end{array}\right.$

On en déduit que $AJ=JA\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}a & d & g\\ 0 & a & d\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}=aI_3+dJ+(g-d)J^2$ avec $(a,d,g)\in\mathbb{R}^3$ quelconque. On en déduit que $AJ=JA\Leftrightarrow A\in vect\left(I_3,J,J^2\right)=F$.

Exercice 2 *(Ccp 2018): Soient A et B deux matrices carrées réelles d'ordre n.*
On suppose qu'il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que P soit de degré non nul et vérifie $P(0)=1$ et $AB=P(A)$.

1. *Etablir que A est inversible.*
2. *En déduire A et B commutent.*

Solution de l'exercice: 1: On pose $P=1+\sum\limits_{i=1}^{l}a_iX^i$. On a $AB=P(A)=I_n+\sum\limits_{i=1}^{l}a_iA^i$ donc $I_n=AB-\sum\limits_{i=1}^{l}a_iA^i=A\left(B-\sum\limits_{i=0}^{l-1}a_{i+1}A^i\right)$ donc A est inversible et $A^{-1}=B-\sum\limits_{i=0}^{l-1}a_{i+1}A^i$. On a $A^{-1}A=AA^{-1}=I_n$ avec $A^{-1}A=\left(B-\sum\limits_{i=0}^{l-1}a_{i+1}A^i\right)A=BA-\sum\limits_{i=1}^{l}a_iA^i$ et $AA^{-1}=A\left(B-\sum\limits_{i=0}^{l-1}a_{i+1}A^i\right)=AB--\sum\limits_{i=1}^{l}a_iA^i$ donc $BA=AB$.

Exercice 3 *CCINP PSI 21:*

1. *Soit $u\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ tel que $u^2=0$ et $rg(u)=n$.*
   (a) *Montrer que* $\ker(u)=\operatorname{Im}(u)$.
   (b) *Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice de u est égale à* $\left(\begin{array}{c|c}0 & I_n\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$.
2. *Soit $u\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{3n}\right)$ tel que $u^3=0$ et $rg(u)=2n$.*
   (a) *Montrer que* $\dim\left(\operatorname{Im}\left(u^2\right)\right)\geq n$.
   (b) *En déduire que* $\ker(u)=\operatorname{Im}\left(u^2\right)$.
   (c) *Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est égale à* $\left(\begin{array}{c|c|c}0 & I_n & 0\\ \hline 0 & 0 & I_n\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)$.

Solution de l'exercice: 1a: Soit $y\in\operatorname{Im}(u)$ et $x\in\mathbb{R}^{2n}$ tel que $y=u(x)$ On a $u(y)=u(u(x))=0$ donc $y\in\ker(u)$ donc $\operatorname{Im}(u)\subset\ker(u)$. Or $rg(u)=n$ donc, d'après le th du rang, $\dim(\ker(u))=\dim(\operatorname{Im}(u))=n$ donc $\ker(u)=\operatorname{Im}(u)$.
1b: Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $\ker(u)=\operatorname{Im}(u)$. On a $e_i\in\operatorname{Im}(u)$ donc $\exists f_i,\ u(f_i)=e_i$. Montrons que $b=(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$. Supposons $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_if_i=0$. En appliquant u, $\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_ie_i=0$ (linéarité et $u(e_i)=0$ et $u(f_i)=e_i$). Or $(e_1,\dots,e_n)$ est libre donc $\mu_1=\dots=\mu_n=0$ et donc, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ie_i=0$ donc $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$ donc $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ est libre avec $2n$ éléments donc base de $\mathbb{R}^{2n}$. Dans cette base, la matrice de u est égale à $\left(\begin{array}{c|c}0 & I_n\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$.
2a: Soit $y\in\operatorname{Im}\left(u^2\right)$ et $x\in\mathbb{R}^{3n}$ tel que $y=u^2(x)$ On a $u(y)=u\left(u^2(x)\right)=0$ donc $y\in\ker(u)$ donc

$\text{Im}\,(u^2) \subset \ker(u)$. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}\,(u)$. On a $\ker(v) = \text{Im}\,(u) \cap \ker(u) \subset \ker(u)$ et $\dim(\ker(u)) = n$ (th du rang) donc $\dim(\ker(v)) \leq n$. Le théorème du rang appliqué à v donne
$\dim(\text{Im}\,(u)) = \dim(\text{Im}\,(v)) + \dim(\ker(v))$ Or $\text{Im}\,(v) = \text{Im}\,(u^2)$ (car $y \in \text{Im}\,(v) \iff \exists z \in \text{Im}\,(u), y = u(z) \iff \exists x \in \mathbb{R}^{3n}, y = u(u(x))$).
Or $rg\,(u) = 2n$ donc
$\dim(\text{Im}\,(u^2)) = \dim(\text{Im}\,(u)) - \dim(\ker(v)) \geq 2n - n = n$.
Conclusion: $\text{Im}\,(u^2) \subset \ker(u)$ et $\dim(\text{Im}\,(u^2)) \geq n = \dim(\ker(u))$ donc $\ker(u) = \text{Im}\,(u^2) = n$.
2b Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\ker(u) = \text{Im}\,(u^2)$. On a $e_i \in \text{Im}\,(u^2)$ donc $\exists g_i,\ u^2(g_i) = e_i$. Posons $f_i = u(g_i)$. On a donc $e_i = u(f_i)$. Montrons que $b = (e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{2n}$. Supposons $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i g_i = 0$. En appliquant d'abord u^2, on obtient $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 0$, puis, en appliquant u, on obtient $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ donc $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est libre avec $3n$ éléments donc base de $\mathbb{R}^{2n}$. Dans cette base, la matrice de u est égale à $\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Exercice 4 *(Ccinp) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la famille $\left(X^k (X+\alpha)^{n-k}\right)_{k \in [[0,n]]}$ est base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$.*

2. *Soit a et b deux complexes distincts. Montrer que la famille $\left((X-a)^k (X-b)^{n-k}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$.*

Solution de l'exercice: Posons $Q_k = P_k(X+a)$. On a $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_k = 0 \implies \forall z \in \mathbb{C} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(z+a) = 0 \implies \forall z \in \mathbb{C} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(z) = 0 \implies \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$, donc la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre et a $n+1$ éléments donc est une base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$. Posons $P_k = X^k (X+a-b)^{n-k} = X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (a-b)^{n-k-j} X^j = \sum_{j=0}^{n-k} \alpha_j X^{k+j}$. La matrice de la famille (P_k) dans la base canonique est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls donc est inversible donc $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$. On a $Q_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k} = P_k(X-a)$ donc la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ une base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$.

Exercice 5 *(Mines ponts 2018) Soient $n \geq 2$, $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ tr(M) = 0\}$ et $N = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^n = 0\}$.*

1. *Les ensembles H et N sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?*

2. *Montrer que $N \subset H$.*

3. *Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.contenant H.*

Solution de l'exercice: Q1: On a $H = \ker(tr)$ et $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle donc H est un hyperplan vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $n = 2$, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = B^2 = 0$ donc $(A, B) \in N^2$ et $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc inversible donc $A + B \notin N$. Pour n quelconque, les matrice $A_n = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$ vérifient de même $(A_n, B_n) \in N^2$ et $A_n + B_n \notin N$ donc N n'est pas un sous-espace vectoriel.
2 On a $N \subset H$ car si $M \in N$, alors $sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \{z \in \mathbb{C}\ z^n = 0\} = \{0\}$ et M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle. On a donc $N \subset H$.

3: On sait que H est un sous-espace vectoriel contenant N et que $\dim(H) = n^2 - 1$.
Montrons que N contient une famille libre avec $n^2 - 1$ éléments.
La famille $(E_{i,j})_{i \neq j}$ est une famille libre de $n^2 - n$ éléments de N (car de carré nul). La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$ donc si $2 \leq i \leq n$, la matrice $F_i = -E_{1,1} - E_{i,1} + E_{1,i} + E_{i,i}$ est élément de N.
Montrons que la famille $((E_{i,j}(i \neq j)), (F_j(2 \leq j \leq n)))$ est libre donc $\dim(vect(((E_{i,j}(i \neq j)), (F_j(2 \leq j \leq n))))) = H$.
Tout sous-espace vectoriel contenant N contient doncc H qui est donc le plus petit sous espace vectoriel contenant N.

Exercice 6 *(Mines ponts 2018): Soit $a_0, \ldots, a_n$ des complexes. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:*
$(i) : a_0 \neq 0$
$(ii) : \forall Q \in \mathbb{C}_n[X],\ \exists P \in \mathbb{C}_n[X] \mid Q = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$.

Solution de l'exercice:
Soit $u : P \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}$.est linéaire $(ii) : \forall Q \in \mathbb{C}_n[X],\ \exists P \in \mathbb{C}_n[X] \mid Q = u(P) \Longleftrightarrow u$ surjective

$$mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(u) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 2 & & n!a_n \\ & a_0 & 2a_1 & & \\ & & & & n(n-1)a_2 \\ & & & & na_1 \\ & & & & a_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 *(X psi) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r avec $0 < r < n$. Montrer qu'il existe $(P_1, P_2) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ telle que $P_1 M P_2$ soit égale à la matrice définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right)$ ou I_r est la matrice carrée identité de taille r.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant: $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. Montrer que A n'est pas inversible.*
3. *Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant:*

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

Solution de l'exercice:
1: Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M et b_0 la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^n$. Par le théorème du rang, $\dim(H) = r$.
Soit $(u_1, \ldots, u_r)$ une base de H et si $(u_{r+1}, \ldots, u_n)$ une base de $\ker(f)$. La famille $b_1 = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n = H \oplus \ker(f)$ et $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ donc $(f(u_1), \ldots, f(u_r))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ qui est donc une base de $\operatorname{Im}(f)$ pour des raisons de dimension. On complète la famille libre $(f(u_1), \ldots, f(u_r))$ en une base b_2 de $\mathbb{R}^n$. On a $mat_{b_1,b_2}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right) = Q^{-1}MP =$ avec $Q = P_{b_0 \to b_2}$et $P = P_{b_0 \to b_2}$ ce qui entraîne le résultat demandé.
2: Supposons que A vérifie: $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
On a alors $\det(2A) = \det(A+A) = \det(A) + \det(A) = 2\det(A)$ et $\det(2A) = 2^n A$. Or $n \geq 2$ donc $2^n \neq 2$ donc $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.
3: On en déduit que A est de rang $r < n$. D'après Q1,

Si $A \neq 0$, alors il existe $(P_1, P_2) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $P_1 A P_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right)$ c'est-à-dire $A = P_1^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n} \end{array}\right.$

Posons $B = P_1^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & I_{n-r} \end{array}\right) P_2^{-1}$. Les matrices A et B ne sont pas inversibles donc $\det(A) + \det(B) = 0$.

On a $A + B = P_1^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & I_{n-r} \end{array}\right) P_2^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1}$ qui est inversible donc $\det(A+B) \neq 0$.

On en déduit que $A = 0$.

La matrice nulle vérifie bien la propriété demandée et est donc la seule solution du problème posé.