Lundi 19 mai 2025

Exercice 1 *(ccp 2018): Soit u et v deux vecteurs distincts et non nuls d'un espace euclidien E. On note H l'hyperplan normal à $u-v$ et s_H la réflexion par rapport à H.*

1. *Montrez que s'il existe une réflexion s telle que $s(u)=v$, alors $\|u\|=\|v\|$.*
2. *On suppose que $\|u\|=\|v\|$, Montrer que $u-v$ et $u+v$ sont orthogonaux. En déduire que s_H est l'unique réflexion s telle que $s(u)=v$.*
3. *Application: on choisit $E=\mathbb{R}^4$, $u=(1,-1,1,0)$ et $v=(0,-1,1,1)$. Ecrire la matrice dans la base canonique de la réflexion qui échange u et v.*

Solution de l'exercice:
1: Une réflexion est une symétrie orthogonale donc une isométrie vectorielle. Or $s(u)=v$ donc $\|u\|=\|s(u)\|=\|v\|$.
2: On a $(u-v|u+v)=\|u\|^2-\|v\|^2=0$ (On donc $u+v\in H$).
a: Montrons que $s_H(u)=v$. donc $u+v\in H$ et $u=\dfrac{1}{2}(u+v)+\dfrac{1}{2}(u-v)$ et $s_H(u)=\dfrac{1}{2}(u+v)-\dfrac{1}{2}(u-v)=v$.
b: Soit s une réflexion par rapport à un hyperplan H' vérifiant $s(u)=v$. On a donc $s(v)=u$ et donc $s(u-v)=v-u$. On en déduit que $v-u$ est orthogonal à H' qui est un hyperplan et donc $H'=H$ d'où $s=s_H$.
3: Soit p la projection orthogonale sur $vect(u-v)$. On a $p(x)=\dfrac{(x|u-v)}{\|u-v\|^2}(u-v)$ et $s_H(x)=q(x)-p(x)=x-2p(x)$ (avec $q=id-p$) donc $s_H(x)=x-2\dfrac{(x|u-v)}{\|u-v\|^2}(u-v)$. Or $u-v=(1,0,0,-1)=e_1-e_4$ donc

$$\begin{cases} s_H(e_1)=e_1-(e_1-e_4)=e_4 \\ s_H(e_2)=e_2 \\ s_H(e_3)=e_3 \\ s_H(e_4)=e_4+(e_1-e_4)=e_1 \end{cases} \text{ et } mat_{b_0(s_H)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer que si M est une matrice orthogonale, alors $|\det(M)|=1$. La réciproque de cette propriété est-elle vraie?*
2. *Détermliner les matrices orthogonales et symétriques.*
3. *Donner un exemple de matrice orthogonale antisymétrique. Montrer que si M est orthogonale et antisymétriques alors n est pair.*

Solution de l'exercice:
1: Vu en cours
2: $\begin{cases} M^T\times M=I_n \\ M^T=M \end{cases} \Longrightarrow M^2=I_n$ donc M est une matrice de symétrie. L'endomorphisme f canoniquement associée à M (on suppose $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel).

- est une symétrie (par rapport $E_1(f)$ parallèment à $E_{-1}(f)$.)
- est auto-adjoint car M est symétrique et la base canonique est orthonormé. donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux donc $E_1(f)\perp E_{-1}(f)$.

On en déduit que f est une symétrie orthogonale.

3: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale et antisymétrique.

Si M est orthogonale et antisymétrique alors $\begin{cases} M^T M = I_n \\ M^T = -M \end{cases}$ donc $M^2 = -I_n$ donc $\det(M)^2 = (-1)^n \geq 0$ donc n est pair.

Exercice 3 *CCINP PSI 21: Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et M la matrice définie par blocs par $M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -U^T \\ \hline U & I_n \end{array}\right)$.*

1. *Montrer que la matrice UU^T est diagonalisable et vérifie $sp\left(UU^T\right) \subset \mathbb{R}_+$.*
2. *Calculer $M^T \times M$. En déduire que M est inversible.*
3. *Montrer que $M^{-1} \times M^T$ est une matrice orthogonale.*

Solution de l'exercice:

1: On a bien $UU^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\left(UU^T\right)^T = UU^T = N$ donc N est symétrique réelle donc diagonalisable. Soit $\lambda \in sp\left(UU^T\right)$ et X un vecteur propre associé. On a $X^T UU^T X = X^T U \left(X^T U\right)^T = \left(X^T U\right)^2$ car $X^T U \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc est réel. De plus, $X^T N X = X^T \lambda X = \lambda \|X\|^2$ donc $\lambda = \dfrac{\left(X^T U\right)^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

2: On a $M^T \times M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & U^T \\ \hline -U & I_n \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & -U^T \\ \hline U & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 + U^T U & 0 \\ \hline 0 & I_n + UU^T \end{array}\right)$ donc $\det\left(M^T \times M\right) = \left(1 + U^T U\right) \times \det\left(I_n + UU^T\right)$.

D'une part $1 + U^T U = 1 + \|U\|^2 \geq 1$

D'autre part, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que part, $P^{-1}\left(UU^T\right)P = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ d'après la première question donc $P^{-1}\left(I_n + UU^T\right)P = diag(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_n)$ donc $\det\left(I_n + UU^T\right) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) \geq 1$.

donc $\det\left(M^T \times M\right) \geq 1$ donc $M^T \times M$ est inversible donc M est inversible.

3: Soit $B = M^{-1} \times M^T$. On a $B \times B^T = \left(M^{-1} \times M^T\right) \times \left(M^{-1} \times M^T\right)^T = M^{-1} \times M^T \times M \times \left(M^{-1}\right)^T = M^{-1} \times M^T \times M \times \left(M^T\right)^{-1}$.

On remarque que $M \times M^T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -U^T \\ \hline U & I_n \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & U^T \\ \hline -U & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 + U^T U & 0 \\ \hline 0 & I_n + UU^T \end{array}\right)$ donc $M^T \times M = M \times M^T$.

On en déduit que $B \times B^T = M^{-1} \times M \times M^T \times \left(M^T\right)^{-1}. = I_{n+1}$ donc B est une matrice orthogonale.

Exercice 4 *(Ccp 2016) Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E vérifiant $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = 0$.*

1. *Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.*
2. *Comparer $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)^{\perp}$.*
3. *Montrer que $f \circ f$ est diagonalisable.*

Solution de l'exercice:

1: $(f(x+y)|x+y) = (f(x) + f(y)|x+y) = (f(x)|x) + (f(y)|x) + (f(x)|y) + (f(y)|y) = 0$. On en déduit que $(f(x)|y) = -(x|f(y))$.

2: Soit $x \in \ker(f)$ et $y \in \operatorname{Im}(f)$. Il existe $y \in E$, $y = f(t)$.

On a $(x|y) = (x|f(t)) = -(f(x)|t) = 0$ car $x \in \ker(f)$ donc $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)^{\perp}$

Or $\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim\left(\operatorname{Im}(f)^{\perp}\right)$ donc $\dim(\ker(f)) = \dim\left(\operatorname{Im}(f)^{\perp}\right)$ et $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)^{\perp}$.

3: On a $(f^2(x)|y) = -(f(x)|f(y)) = (x|f^2(y))$.donc $f \circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint donc diagonalisable.

Exercice 5 *CCINP PSI 21: Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de E vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$.*

1. *Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels. Montrer que $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \times \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$*

2. *En déduire que la famille $(e_i + u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E.*

Solution de l'exercice: 1: D'après l'inégalité triangulaire, $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|u_i\|$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire usuel des vecteurs $(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$ et $(\|u_1\|, \ldots, \|u_n\|)$, on obtient $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| \|u_i\|\right)$
$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$ donc $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \times \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

2: Montrons que la famille $(e_i + u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre. Supposons $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i + u_i) = 0$. On a alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = -\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ donc $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 = \left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\|^2$.

D'une part, d'après pythagore, $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ car $\|e_i\| = 1$.

D'autre part, $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \times \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$ et, comme $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$, si $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > 0$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \times \sum\limits_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, ce qui entraîne une contradiction donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 0$ donc $\forall i \in [[1, n]]$, $\lambda_i = 0$ donc la famille $(e_i + u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre et E est de dimension n donc la famille $(e_i + u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E.

Exercice 6 *(Ccp) : Soit p un projecteur orthogonal de rang r d'un espace euclidien E de dimension n et de base orthonormale $b = (e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\|^2 = (p(x) \mid x)$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = r$.*

Solution de l'exercice:

Soit p un projecteur orthogonal sur F. On a $\forall x \in E$, $(p(x) | x) = (p(x) | p(x) + (p(x) | x - p(x)) = \|p(x)\|^2 + (p(x) | (x - p(x)) = \|p(x)\|^2$ car $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$. On en déduit que $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (p(e_i) | e_i)$. Or $(p(e_i) | e_i)$ est le coefficient i, i de la matrice de p dans la base b donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = tr(p)$. On conclut en utilisant que $tr(p) = rg(p)$ car p est un projecteur (propriété de cours qu'on obtient en se plaçant dans une base adaptée).

Exercice 7 *(mines ponts) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à -dire $(A, B) \in (S_n(\mathbb{R}))^2$.*

1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $R \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.*

2. *Dans le cas où cette condition est réalisée, combien y a-t-il de matrices $R \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A = R^2$? (on pourra faire une disjonction de cas)*

3. *On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$et $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) \geqslant 0$.*

Solution de l'exercice:. 1 ($\Longrightarrow$) si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, d'après le théorème spectral, comme A est symétrique réelle, il existe $P \in O(n)$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_\mathrm{n})$ avec $\lambda_\mathrm{k} \in \mathrm{Sp}(A)$ donc $\lambda_\mathrm{k} \geqslant 0$ telles que $A = \mathrm{PDP}^\top$. En posant $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_\mathrm{n}}\right)$, on a $\Delta^2 = \mathrm{D}$ donc, en posant $\mathrm{R} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top$, on a bien $\mathrm{R} \in \mathrm{S_n}(\mathbb{R})$ car $\mathrm{R}^\top = \left(\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\top\right)^\top =$

$\mathrm{P}^{\top}\Delta^{\top}\left(\mathrm{P}^{\top}\right)^{\top}=\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{\top}=\mathrm{R}$ car Δ est symétrique. De plus, $R^2=\left(P\Delta P^{\top}\right)^{=}P\Delta^2P^{\top}$ car $P^{\top}P=I_n$ et, comme $\Delta^2=D$, on a $R^2=PDP^{\top}=A$.
($\Longleftarrow$) S'il existe $R\in S_n(\mathbb{R})$ tel que $A=R^2$, soit λ une valeur propre de A, donc $\lambda\in\mathbb{R}$ par le théorème spectral. Alors il existe $X\neq 0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX=\lambda X$. Ainsi, $X^{\top}AX=\lambda X^{\top}X=\lambda\|X\|^2$ mais aussi $X^{\top}AX=X^{\top}R^2X=X^{\top}R^{\top}RX=\|RX\|^2$ avec le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné par $(X\mid Y)=X^{\top}Y$. Par conséquent, $\lambda=\frac{\|RX\|^2}{\|X\|^2}\geqslant 0$ donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\mathbb{R}_+$.
Par double implication, $(\exists\mathrm{R}\in\mathrm{S_n}(\mathbb{R}),\mathrm{R}^2=\mathrm{A})\Longleftrightarrow\mathrm{Sp}(\mathrm{A})\subset\mathbb{R}_+)$.
2 Commençons par une remarque (avec $n=2$) qui montre que la question pose problème:
Si $A=I_2$ et que R est la matrice dans la base canonique d'une symétrie orthogonale, alors
- une symétrie orthogonales eyant auto-adjointe R est symétrique
- $R^2=I_2$ (propriété des symétries)
Il y a une infinité de symétries orthogonales de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donc il y a une infinité de solutions.
(on obtient en particulier les matrices de réflexion $S_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$).
Cela nous conduit à reposer la question plus précisément:
On suppose que A admet n valeurs propres distinctes positives $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ et $(e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.
Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1 donc $E_{\lambda_k}(A)=vect\,(e_k)$.

Analyse : soit $R\in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A=R^2$, comme $AR=R^3=RA$, A et R commutent.
Soit f et g canoniquement associés respectivement à A et R donc f et g commutent
Les sous-espaces propres de f sont stables par g donc $g(e_k)\in vect\,(e_k)$ donc e_k est stable par g.
Conclusion: $mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}=A'$ et $mat_{(e_1,\cdots,e_n)}(g)=\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}=R'$.
De plus, $A=R^2$ donc $A'=R'^2$ donc $i\in[[1,n]]$ $\mu_i^2=\lambda_i$.
Si $P=P_{b_0\to(e_1,\cdots,e_n)}$, on a $R'=P^{-1}RP$ donc $R=PR'P^{-1}$.
Premier cas: $0\notin sp\,(A)$. On a donc $\mu_i=\pm\sqrt{\lambda_i}$, ce qui donne 2^n matrices R' donc autant $(*)$ de matrices R.
Deuxième cas: $0\in sp\,(A)$. Posons par exemple $\lambda_1=0$.
$\lambda_1=0\Leftrightarrow\mu_1=0$ et si $i\neq 1,\mu_i=\pm\sqrt{\lambda_i}$, ce qui donne 2^{n-1} matrices R' donc autant de matrices R.
Remarque $(*)$: Dans le raisonnement précédent, on a utilisé que $M\mapsto PMP^{-1}$ est injective (c'est même un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
Synthèse : On vérifie que pour les matrices R' précédentes, $(R')^2=A'$ donc $R^2=A$.
Vérifions que R est symétrique. L'eendomrphisme g est diagonalisable en base orthonormé donc R est symétrique.
c. D'après a., comme A et B sont symétriques réelles à valeurs propres positives, il existe $(R,S)\in(S_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A=R^2$ et $B=S^2$. Ainsi, $AB=RRSS$ d'où $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(RRSS)=\mathrm{Tr}(RSSR)=\mathrm{Tr}\left(R^{\top}S^{\top}SR\right)=\|SR\|^2\geqslant 0$ avec le produit scalaire canonique sur les matrices donné par $(A\mid B)=\mathrm{Tr}\left(A^{\top}B\right)$.

Exercice 8 *(ccp psi): Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A\times A^T\times A=I_n$, alors A est inversible et symétrique. En déduire la valeur de A.*

Solution de l'exercice: Si $A\times A^T\times A=I_n$, alors A est inversible d'inverse $S=A^T\times A$.
On a $S^T=S$ donc S est symétrique et $(S^{-1})^T=\left(S^T\right)^{-1}=S^{-1}$ (l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique) Or $A=S^{-1}$ donc A est symétrique. On a donc $A^3=I_n$ donc $sp\,(A)\subset\{1\}$, ensemble des racines du polynome annulateur X^3-1. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable et $sp\,(A)=\{1\}$ donc $A=I_n$.

Exercice 9 *(centrale) Soit un entier $n\geqslant 2$.*

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que:
$$\exists\,(M_1,M_2)\in(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2,\forall M\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\mathrm{Tr}(AM_1)\leq\mathrm{Tr}(AM)\leq\mathrm{Tr}(AM_2)$$

3. On suppose que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ M & \mapsto \mathrm{Tr}(M) \end{array} \right.$.

   Déterminer $f(O_n(\mathbb{R}))$ (on pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair).

Solution de l'exercice:

1: $O_n(\mathbb{R})$ est borné: Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors pour tout (i,j), $|a_{i,j}| \leq 1$ car $\|C_j\| = 1$.
$O_n(\mathbb{R})$ est fermé:
Soit (A_p) une suite de $O_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p^T = A^T$ (continuité de la transposition:application linéaire entre ev de dim finie) donc $I_n = \lim\limits_{p\to+\infty} A_p^T \times A_p = A^T \times A$ (continuité du produit matriciel) donc $A \in O_n(\mathbb{R})$.

2: L'application $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto tr(M) \end{array} \right.$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc f est continue.
L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné donc f est bornée et atteint ses bornes.
Il existe $(A,B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $f(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subset [f(A), f(B)]$.

3: On a $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow AM \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{array} \right.$ est bijective de réciproque $\psi \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto A^{-1}M \end{array} \right.$ car $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id$.
On a donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{AM,\ M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$ et donc $f(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \{tr(M),\ M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$
Or si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $|m_{i,j}| \leq 1$ donc $tr(M) \in [-n, n]$ (le raisonnement avec les fermés bornés est donc inutile ici).
Si $n = 2p$. On a $f(\mathcal{O}_{2p}(\mathbb{R})) \subset [-2p, 2p]$. Posons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. On a $tr(R_\theta) = 2\cos(\theta)$ qui décrit $[-2, 2]$ lorsque θ décrit $[0, \pi]$.
Soit M la matrice diagonale par blocs $M_\theta = \begin{pmatrix} R_\theta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_\theta \end{pmatrix}$. On a $tr(M_\theta) = n \times 2\cos(\theta)$ donc $f(\mathcal{O}_2(\mathbb{R})) = [-2n, 2n]$.
Si $n = 2p+1$. On a $f(\mathcal{O}_{2p}(\mathbb{R})) = [-2p, 2p]$. Posons $A_\theta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & M_\theta \end{array}\right) \in \mathcal{O}_{2p+1}(\mathbb{R})$ et $B_\theta = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & M_\theta \end{array}\right) \in \mathcal{O}_{2p}(\mathbb{R})$ D'après la question précédente, $\{f(A_\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \{1 + 2p\cos(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = [-2p+1, 2p+1]$ et $\{f(B_\theta), \theta \in \mathbb{I}$
$\{-1 + 2p\cos(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = [-2p-1, 2p-1]$ donc $[-2p-1, 2p+1] \subset f(\mathcal{O}_{2p+1}(\mathbb{R}))$ donc $f(\mathcal{O}_{2p+1}(\mathbb{R})) = [-2p-1, 2p$
On a donc $f(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = [-n, n]$.

Exercice 10 *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

1. *Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ distincte de I_n vérifiant A est symétrique et inversible et A est semblable à A^{-1}.*

2. *Donner une condition pour qu'une matrice diagonale et inversible soit semblable à son inverse.*

3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est symétrique, inversible est semblable à A^{-1}, alors $tr(A^2) \geq n$.*

Solution de l'exercice:

1: Si $n = 2$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est symétrique inversible d'inverse $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est semblable à A (inverser l'ordre des vecteurs de base). On peut prendre $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right)$ dans le cas n quelconque.

2: Soit $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale inversible. On a $D^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$.
Si D est semblable à D^{-1}, ces deux matrices ont même polynôme caractéristique donc $\lambda \in sp(D)$ est présent le même nombre de fois dans la diagonale de D et celle de D^{-1}, ce qu'on peut traduire par:
Il existe σ, bijection de $[[1, n]]$ dans lui même telle que $\forall i \in [[1, n]]$, $\lambda_i^{-1} = \lambda_{\sigma(i)}$.

3: A est symétrique, inversible donc semblable à $D = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale inversible.
On a donc $tr\,(A^2) = tr\,(D^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$. Or A est semblable à A^{-1} qui est semblable à D^{-1} ($D = P^{-1}AP \Rightarrow D^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$) donc D est semblable à D^{-1}.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $n^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \times \lambda_i^{-1}\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right) \times \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^{-1}\right)^2\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^2$ d'après la question précédente. On a donc $n \leq tr\,(A^2)$.

Exercice 11 *(mines ponts) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire $(A, B) \mapsto (A \mid B) = \int_0^1 A(t)B(t)dt$.*
Pour $P \in E$, on définit le polynôme $u(P)$ par $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$.

1. *Montrer que u est linéaire et à valeurs dans E.*

2. *Montrer que u est autoadjoint.*

3. *Montrer que u est bijectif.*

Solution de l'exercice:

Préliminaire: On vérifie rapidement que l'application $(A, B) \mapsto \int_0^1 A(t)B(t)dt$ définit bien un produit scalaire sur E. Déjà la fonction AB est continue sur le segment $[0;1]$ donc l'intégrale est bien définie. La symétrie, la positivité et la bilinéarité sont claires. Soit $P \in E$ tel que $(P \mid P) = 0$, alors $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$ et la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue sur $[0;1]$ donc $\forall t \in [0;1], P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$ et P admet une infinité de racines donc $P = 0$. $(.|.)$ est donc bien un produit scalaire sur E .
1: Soit $P \in E$, comme $t \mapsto (x+t)^n P(t)$ est continue sur le segment $[0;1]$, $u(P)(x)$ est bien défini et, avec le binôme de NEWTON, $\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \int_0^1 \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k t^{n-k}\right) P(t)dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, avec les mêmes arguments, $\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} P(t)dt\right) x^k$, d'où $u(P) \in E$. De plus, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u(\lambda P + Q) = \int_0^1 (x+t)^n (\lambda P(t) + Q(t))dt = \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt + \int_0^1 (x+t)^n Q(t)dt = \lambda u(P) + u(Q)$ par linéarité de l'intégrale donc u est linéaire : u est donc un endomorphisme de E.
2. Pour $(P, Q) \in E^2$, avec l'expression de b., $(u(P) \mid Q) = \int_0^1 \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \int_0^1 u^{n-k} P(u)du\right) t^k\right) Q(t)dt$ donc, par linéarité de l'intégrale, on a $(u(P) \mid Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(X^{n-k} \mid P\right) \int_0^1 t^k Q(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(X^{n-k} \mid P\right) \left(X^k \mid Q\right)$. En effectuant le changement d'indice $\mathfrak{j} = \mathfrak{n} - k$, on a $(\mathfrak{u}(P) \mid Q) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{j}} \left(X^{\mathfrak{j}} \mid P\right) \left(X^{\mathfrak{n}-\mathfrak{j}} \mid Q\right) = (\mathfrak{u}(Q) \mid P)$ avec le calcul précédent car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Ainsi, $(u(P) \mid Q) = (P \mid u(Q))$ par symétrie donc u est autoadjoint.
3. En reprenant le résultat $\forall x \in \mathbb{R}, u(P)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} P(t)dt\right) x^k$, on a les coefficients du polynôme $u\,(P)$
Comme u est un endomorphisme en dimension finie, u est bijectif si et seulement si u est injectif.
Soit P $\in$ Ker(u), on a donc $u(P) = 0$ donc $\forall k \in [[0, n]]$, $\binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} P(t)dt = 0$ donc $\forall i \in [[0, n]]$, $\int_0^1 t^i P(t)dt = (P \mid X^i) = 0$.
On en déduit que $P \in (vect\,(1, X, \ldots, X^n))^{\perp} = E^{\perp} = \{0_E\}$ donc Ker$(u) = \{0\}$, on a u injectif donc u bijectif.