Vendredi 23 mai 2025

Exercice 1 *(IMT) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de même paramètre.$p \in]0,1[$. On pose $U = \dfrac{X}{Y}$.*

1. *Déterminer l'espérance de U.*
2. *Montrer que $E(U) > 1$.*
3. *Trouver la loi de U.*

Solution de l'exercice:
1: Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes donc $f(X) = X$ et $g(Y) = \dfrac{1}{Y}$ le sont aussi. On a $0 \leq \dfrac{1}{Y} \leq 1$ donc $\dfrac{1}{Y}$ est d'espérance finie et $E(U) = E\left(X \times \dfrac{1}{Y}\right) = E(X) \times E\left(\dfrac{1}{Y}\right)$. On a, d'après la formule du transfert, $E\left(\dfrac{1}{Y}\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} pq^{n-1} = \dfrac{p}{q} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} q^n = -\dfrac{p}{q} \ln(1-q)$. On en déduit que $E(U) = -\dfrac{1}{p}\dfrac{p}{q} \ln(1-q) = -\dfrac{1}{q} \ln(1-q)$.
2: On sait que $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ et que l'égalité est vraie si et seulement si $x = 0$ (inégalité de convexité) On en déduit que $\ln(1-q) < -q$ donc $\dfrac{1}{q} \ln(1-q) < -\dfrac{1}{q} q$ donc $E(U) > 1$.
3: On suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $U(\Omega) \subset \mathbb{Q}_+^*$.
Soit $r = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ sans facteurs communs (fraction irréductible). On a $(U = r) = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} ((X = ak) \cap (Y = bk))$ (union disjointe) donc $P(U = r) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P((X = ak) \cap (Y = bk))$ soit
$P(U = r) \underset{I}{=} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X = ak) \times P(Y = bk) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{ak-1} \times pq^{bk-1} = \dfrac{p^2}{q^2} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(q^{a+b}\right)^k = \dfrac{p^2 q^{a+b-2}}{1 - q^{a+b}}$.

Exercice 2 *Soit $x_0, \cdots, x_n$ des réels distincts.et $\mathcal{B} = \left((X + x_0)^n, \cdots, (X + x_n)^n\right)$ une famille de $\mathbb{R}_n[X]$.*

1. *Ecrire la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de de $\mathbb{R}_n[X]$..*
2. *En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Solution de l'exercice:
Ecrivons la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, \ldots X^{n-1}, X^n)$ comme $(X + x_j)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_j^i X^{n-i}$, on a

$$M = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} x_0^n & \cdots & \binom{n}{0} x_n^n \\ \binom{n}{1} x_0^{n-1} & & \binom{n}{1} x_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} x_0^0 & & \binom{n}{n} x_0^0 \end{pmatrix} \text{qui est quasiment une matrice de Vandermonde.}$$

Plus précisément, en utilisant la multilinéarité du déterminant sur les $n+1$ lignes, on a $\det(M) = \left(\prod\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\right) \times$
$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_n^n \\ x_0^{n-1} & x_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ x_0^0 & x_0^0 \end{vmatrix}.$$

On peut ensuite permuter les lignes de manière à obtenir les lignes dans l'ordre et on aura $\det(M) = \pm \left(\prod\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\right) \times \prod_{0 \leqslant j < j' \leqslant n} (x_{j'} - x_j) \neq 0$ car on a choisi les $x_0, \cdots, x_n$ distincts. Ainsi, comme M est inversible, $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exercice 3 *Ccinp: Trois enfants A,B et C jouent à la balle:*

- *A envoie la balle à B avec une probabilité de* $\frac{3}{4}$ *et à C avec une proba de* $\frac{1}{4}$.
- *B envoie la balle à A avec une probabilité de* $\frac{3}{4}$ *et à C avec une proba de* $\frac{1}{4}$.
- *C envoie toujours la balle à B. On note* a_n, b_n *et* c_n *les probabilités que A,B ou C ait la balle à la* $n^{ième}$ *étape.*

1. *Exprimez* a_{n+1}, b_{n+1} *et* c_{n+1} *en fonction de* a_n, b_n *et* c_n.
2. *Trouvez une matrice M telle que* $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
3. *Déterminez la limite de* $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ *quand* $n \to +\infty$ *et montrez que cette limite est indépendante des conditions initiales.*

Solution de l'exercice: Q1 et 2: En notant A_n, B_n et C_n les événements "la balle est en A (respectivement B et C) à la $n^{ième}$ étape, on a $P(A_{n+1}|A_n) = 0$, $P(B_{n+1}|A_n) = \frac{3}{4}$, $P(C_{n+1}|A_n) = \frac{1}{4}$, $P(A_{n+1}|B_n) = \frac{3}{4}$, $P(B_{n+1}|B_n) = 0$, $P(C_{n+1}|B_n) = \frac{1}{4}$, $P(A_{n+1}|C_n) = 0$, $P(B_{n+1}|C_n) = 0$ et $P(C_{n+1}|C_n) = \frac{1}{4}$. En utilisant le SCE (A_n, B_n, C_n), on a $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)P(C_n)$ et donc $a_{n+1} = \frac{3}{4}b_n$. En faisant de même pour B_{n+1} et C_{n+1},

On obtient $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.avec $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

3: Soit $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Remarque: On a $X_{n+1} = AX_n$. Si (X_n) converge vers L, alors, en passant à la limite dans la relation précédente, $L = AL$.

a: Convergence de (X_n): On montre par récurrence que $X_n = M^n X_0$ avec .

On a $\varkappa_M(x) = \det(xI_3 - M) = (x-1)\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$ donc $sp(M) = \left\{1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ et M est diagonalisable.

Soit (U_1, U_2, U_3) une base de vecteurs propres associés respectivement à $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

Posons $X_0 = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3$.

On en déduit que $X_n = M^n(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \alpha_3 U_3) = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 \left(\frac{1}{4}\right) U_2 + \alpha_3 \left(-\frac{3}{4}\right)^n U_3 \longrightarrow_{n\to+\infty} \alpha_1 U_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_1(M)$.

Remarque: On a $X_n \longrightarrow_{n\to+\infty} p(X_0)$ avec p projection sur $E_1(M)$ parallèlement à $E_{\frac{1}{4}}(M) \oplus E_{-\frac{3}{4}}(M)$

Or $E_1(M) = vect\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}\right)$.

il existe λ tel que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{7}{16} \end{pmatrix}$.

Or $\forall n$, $a_n+b_n+c_n=1$ (car (A_n,B_n,C_n) est un SCE) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n+b_n+c_n=1$ donc $a+b+c=1$.

On en déduit que $\lambda=\dfrac{16}{35}$ donc (X_n) converge vers $\begin{pmatrix} \frac{12}{35} \\ \frac{16}{35} \\ \frac{7}{35} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *(Ccinp) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.*

1. *Rappeler la définition du :produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Soit $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (I_3,J) est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*
3. *Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonale de A sur le sous-espace engendré par (I,J).*

Solution de l'exercice:
1: Pour la première question, voir le cours.
2: Rappel: Si $(e_1,\dots,e_k)$ est une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de l'espace euclidien E. Pour $x\in E$ le vecteur $p(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}(x|e_i)\,e_i$ est le projeté orthogonal de x sur F

On a $tr\left({}^tI_3\times J\right)=tr(J)=0$ donc la famille (I_3,J) est une famille orthogonale. Soit p la projection orthogonale sur $F=vect(I_3,J)$. On a $\|I_3\|=\|J\|=\sqrt{3}$ donc $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}I_3,\dfrac{1}{\sqrt{3}}J\right)$ est une base orthonormée de F.

On en déduit à l'aide du rappel que $p(A)=\dfrac{(I_3|A)}{\|I_3\|^2}I_3+\dfrac{(J|A)}{\|J\|^2}J=\dfrac{1}{3}I_3+\dfrac{1}{3}J=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 *:Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.*

1. *Diagonaliser M.*
2. *En déduire que B est sembable à une matrice diagonale par blocs.*
3. *Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable?*

Solution de l'exercice : 1: Posons $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice M admet deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.
2: En posant $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1}MQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a $Q^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $P=\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ et $P'=\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, on a $PP'=I_{2n}$ donc $P'=P^{-1}$. Par ailleurs $P^{-1}BP=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}=B'$.
3 a Si A est diagonalisable, alors B' est diagonalisable ($R=\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}$ avec $R_1^{-1}AR_1$ diagonale) donc B est diagonalisable.
b Si B est diagonalisable alors B' est diagonalisable.
Soit f l'application linéaire canoniquement associée à B'. Soit $(e_1,\dots,e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.
Le sous-espace $F=vect(e_1,\dots,e_n)$ est stable par f et l'endomorphisme g induit par f sur F vérifie $mat_{(e_1,\dots,e_n)}(g)=A$.
D'après le cours, l'endomorphisme f est diagonalisable donc g l'est aussi donc A est diagonalisable.
Conclusion: B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 6 *(Mines) Soit* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *une famille de réels distincts et* $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ *une famille de réels.*

1. *Montrer qu'il existe un et un seul polynôme* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant* $P(a_i) = b_i$.
2. *Montrer qu'il existe une unique famille de* $n+1$ *réels* $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *telle que pour tout polynôme* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\,dt = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i)$.

Solution de l'exercice: Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[\mathbb{X}] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\varphi(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n))$. L'application φ est linéaire (à vérifier). Si $P \in \ker(\varphi)$ alors $\forall i$, $P(a_i) = 0$ donc P admet $n+1$ racines donc $P = 0$..On en déduit que $\ker(\varphi) = \{0\}$ et, puisque $\dim(\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$ donc φ est un isomorphisme. Il existe donc un et un seul $P \in \mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$ vérifiant $\varphi(P) = (b_0, \ldots, b_n)$. Posons, pour $P \in \mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$, $f_i(P) = P(a_i)$ et $f(P) = \int_0^1 P(x)\,dx$. On demande de montrer que f peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire des f_i. Les applications f et f_i sont linéaires (à vérifier) doonc éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[\mathbb{X}], \mathbb{R})$ de dimension $n+1$. Montrons que $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[\mathbb{X}], \mathbb{R})$. Elle admet $n+1$ éléments. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Supposons $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$. On a donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_i\,(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i) = 0$. Soit $i \in [|0, n|]$ fixé. En prenant P l'unique polynôme vérifiant $P(a_i) = 1$ et $P(a_j) = 0$ si $j \neq i$, on obtient $\lambda_i = 0$. On en déduit que $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[\mathbb{X}], \mathbb{R})$ donc qu'il existe une unique famille de réels $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telle que $f = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_i$ c'est-à-dire, pour tout polynôme réel $P \in E$, $f(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(P)$ soit $\int_0^1 P(x)\,dx = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i)$.

Exercice 7 *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *et tout entier* $n \geqslant 3$, *on définit la matrice* $A_n(a,b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1 et ceux de la première ligne et de la première colonne valent alternativement b puis a. Par exemple on a :*

$$A_5(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A_6(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a & b \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que* $A_n(a,b)$ *est diagonalisable.*
2. *Soit* $A, B \in \mathbb{R}$ *tels que* $2B - (A-2)^2 > 0$.
   Résoudre le système $\begin{cases} x + y = A \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = B \end{cases}$ *(d'inconnues réelles* x, y*).*
3. *Déterminer le rang de* $A_n(a,b) - I_n$. *Que peut-on en déduire sur les éléments propres de* $A_n(a,b)$ *?*
4. *On suppose que* n *est impair* $(n = 2p+1)$, *calculer la trace de* $(A_n(a,b) - I_n)^2$.
   En déduire les valeurs propres de $A_n(a,b)$.
5. . *La matrice* $A_n(a,b)$ *est-elle toujours diagonalisable dans le cas où* a *et* b *sont complexes?*

Solution de l'exercice: 1:La matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable (théorème spectral).

2:$(S) : \begin{cases} x + y = A \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + (y-1) = A - 2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = B \end{cases}$ donc

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + (y-1) = A - 2 \\ ((x-1) + (y-1))^2 - 2(x-1)(y-1) = B \end{cases}$

En posant $x_1 = x - 1$ et $y_1 = y - 1$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = A - 2 \\ x_1 y_1 = \dfrac{(A-2)^2 - B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, y_1)$ couple de racines de $P = X^2 - (A-2)X + \dfrac{(A-2)^2 - B}{2}$..

Le discriminant de P vaut $(A-2)-2\left((A-2)^2-B\right)=2B-(A-2)^2>0$.
Donc P a deux racines $u=\frac{A-2+\sqrt{2B-(A-2)^2}}{2}$ et $v=\frac{A-2-\sqrt{2B-(A-2)^2}}{2}$.
Il y a donc deux solutions à (S): $(x,y)=(u+1,v+1)$ et $(x,y)=(u,v)$.
3. (a) Si$(a,b)=(0,0)$ la matrice $A_n(a,b)-I_n$ est nulle, donc de rang 0 ;
alors $A_n(a,b)=I_n$ et les éléments propres sont évidents.
Si $(a,b)\neq(0,0)$, la matrice $A_n(a,b)-I_n$ a ses colonnes 2 à n qui sont colinéaires à l'une d'entre elles qui est non nulle (colonne 2 si $b\neq 0$; colonne 3 si $a=0$ et $b\neq 0$) et elles ne sont pas colinéaires à la colonne 1. Le rang est la dimension de l'espace engendré par les colonnes, donc rang $(A_n(a,b)-I_n)=2$.
Comme $n\geqslant 3$ on en déduit que $A_n(a,b)-I_n$ n'est pas inversible, donc 1 est valeur propre de $A_n(a,b)$; d'après le théorème du rang, le sous-espace propre associé est de dimension $n-2$.
4 On suppose n impair. $n=2p+1$.
Comme la matrice est diagonalisable, il y a deux autres valeurs propres λ_1,λ_2 (éventuellement égales).
On calcule seulement les coefficients diagonaux de $(A_n(a,b)-I_n)^2$; ils valent : $b^2+a^2+b^2+\cdots$ puis b^2, puis a^2, puis b^2, puis a^2, etc. .
Ainsi : $\operatorname{tr}(A_n(a,b)-I_n)^2=2p\,(a^2+b^2)$.
Les valeurs propres ont déjà été trouvées lorsque $(a,b)=(0,0)$.
Si $(a,b)\neq(0,0)$, d'après la question précédente $A_n(a,b)$ est semblable à une matrice Δ diagonale,
$\Delta=\operatorname{diag}(1,\ldots,1,\lambda_1,\lambda_2)$ donc $n=\operatorname{tr}(A_n(a,b))=(n-2)+\lambda_1+\lambda_2$.
Comme $(A_n(a,b)-I_n)^2$ est semblable à $(\Delta-I_n)^2$, on a :

$$2p\left(a^2+b^2\right)=\operatorname{tr}(A_n(a,b)-I_n)^2=(\lambda_1-1)^2+(\lambda_1-1)^2.$$

D'après Q2, avec $A=2$ et $B=2p\,(a^2+b^2)$, comme $B-(A-2)^2=2p\,(a^2+b^2)>0$, on obtient:

$$\operatorname{Sp}(A_n(a,b))=\{1,\lambda_1,\lambda_2\}=\left\{1,1+\sqrt{p\,(a^2+b^2)},1-\sqrt{p\,(a^2+b^2)}\right\}.$$

5:En prenant $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, l'essentiel de ce qui a été fait précédemment subsite mais on ne peut pas écrire $\sqrt{p\,(a^2+b^2)}$. Cependant $p\,(a^2+b^2)$ admet deux racines carrées qui sont distinctes seulement si $a^2+b^2\neq 0$. Or $a^2+b^2=0$ est possible pour $(a,b)=(1,i)$.
Pour $n=3$, la matrice $A=A_3(1,\mathrm{i})=\begin{pmatrix}1&i&1\\i&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ admet $X^3-3X^2+3X-1=(X-1)^3$ comme polynôme caractéristique donc $sp\,(A)=\{1\}$.et A n'est pas diagonalisable.
(car sinon A serait semblable donc égale à I_3).

Exercice 8 *(Ccinp) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix}A&2A\\A&2A\end{pmatrix}$. On suppose que $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$.*

1. *Justifier que A est diagonalisable et préciser son spectre.*
2. *Montrer que 0 est valeurs propres de B et déterminer la dimension du sous-espace propre $E_0(B)$.*
3. *Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Que peut-on dire de $\begin{pmatrix}X\\X\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$? En déduire que B est diagonalisable.*
4. *Généraliser à $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et de rang n.*

Solution de l'exercice: (Ccp 2015)
1: Soit On suppose que $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable.
On utilisera de plus que $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $tr\,(A)=2$ donc $sp\,(A)=\{3,-1\}$.

2: Par ailleurs $C_3(B) = 2C_1(B)$ et $C_4(B) = 2C_2(B)$ donc $rg(B) \leq 2$ et $(C_1(B), C_2(B))$ est libre car $(C_1(A), C_2(A))$ est libre donc $rg(B) = 2$. On en déduit que $\dim(\ker(B)) = 2$ donc 0 est valeur propre de B et $\dim(E_0(B)) = \dim(\ker(B)) = 2$.

3 Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.On a $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX+2AX \\ AX+2AX \end{pmatrix} = 3\lambda\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \neq 0$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre 3λ.Or A admet deux valeurs propres non nulles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$

On a donc $\dim(E_0(B)) + \dim(E_{-3}(B)) + \dim(E_9(B)) \geq 2+1+1 = 4$.

donc B est-elle diagonalisable.

3 Supposons maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable et de rang n. On a $C_{n+1}(B) = 2C_1(B) \dots C_{2n}(B) = 2C_n(B)$ donc $rg(B) \leq n$ et $(C_1(B), \dots, C_n(B))$ est libre car $(C_1(A), \dots, C_n(A))$ est libre donc $rg(B) = n$. On en déduit que $\dim(E_0(B)) = 2n - n = n$. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A, avec $AX_i = \lambda_i X_i$.avec $\lambda_i \neq 0$ car A est de rang n. En posant $Y_i = \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix}$, on a $BY_i = 3\lambda_i Y_i$ donc $(Y_1, \dots, Y_n)$ une famille de n vecteurs propres de A associés à des valeurs propres non nulles.

La famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ est libre car $(X_1, \dots, X_n)$ est libre (car si $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i = 0_{2n,1}$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = 0_{n,1}$.donc les a_i sont nuls)

donc $\sum\limits_{\lambda \in sp(A)} \dim(E_{3\lambda}(B)) \geq n$.

Or $\lambda \in sp(A) \Longrightarrow 3\lambda \neq 0$.

Or $\dim(E_0(B)) = n$ donc $\sum_{\mu \in sp(B)} \dim(E_\mu(B)) \geq n + n = 2n$ donc B est diagonalisable.

Exercice 9 *Ccp: Soit A une matrice carrée à coefficients complexes vérifiant $6A^2 - 5A + I_n = 0$. On définit la suite de matrices (B_k) par $B_0 = A$ et pour tout $k \geq 0$, $B_{k+1} = B_k(I_n - B_k)$. Montrer que la suite (B_n) converge vers la matrice nulle.*

Solution de l'exercice:

1: Elements propres de A: Les racines de $6x^2 - 5x + 1 = 0$ sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ donc le polynôme $6X^2 - 5X + 1$ est scindé à racines simples donc la matrice A est diagonalisable et semblable à $A' = diag\left(\underbrace{\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}}_{p \text{ fois}}, \underbrace{\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{3}}_{n-p \text{ fois}}\right)$ avec $0 \leq p \leq n$. Soit P une matrice inversible telle que $A' = P^{-1}AP$

2: Posons $B'_k = P^{-1}B_kP$. On a $B_0 = A'$. On a $B'_{k+1} = P^{-1}B_{k+1}P = P^{-1}(B_k - B_k^2)P = P^{-1}B_kP - P^{-1}B_k^2P = B'_k - B'^2_k$.

On en déduit par récurrence qu'il existe (u_k, v_k) tels que $B'_k = diag\left(\underbrace{u_k, \dots, u_k}_{p \text{ fois}}, \underbrace{v_k, \dots, v_k}_{n-p \text{ fois}}\right)$ avec $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{k+1} = u_k - u_k^2 : (R)$ et $v_0 = \frac{1}{3}$ et $v_{k+1} = v_k - v_k^2$.

3 convergence des suites (u_k) :

On montre que $u_k \in [0, 1]$ (récurrence) que la suite (u_k) est décroissante donc converge vers l puis que $l = 0$ en passant à la limite dans la relation (R) et pareil pour (v_k).

4: Conclusion: On en déduit que $\lim\limits_{k \to +\infty} B'_k = 0$. Or $B_k = PB'_kP^{-1}$ donc, par continuité du produit matriciel, $\lim\limits_{k \to +\infty} B_k = 0$.

Exercice 10 *On note E l'espace vectoriel complexe formé des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
Soit un paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit $f_k \in E$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^k e^{\alpha x}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $f_0, f_1, \dots, f_n$.

1. *Déterminer la dimension de* E_n.

2. *Montrer que l'application* $D : f \mapsto f'$ *définit un endomorphisme de* E_n.

3. *a: Montrer que* D_n *est bijectif si et seulement si* $\alpha \neq 0$.
   b: Montrer plus généralement que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$*, l'endomorphisme* $P(D_n)$ *est bijectif si et seulement si* α *n'est pas racine de* P.

4. *Soient deux polynômes* P *et* Q *de* $\mathbb{C}[X]$ *tels que* $Q(\alpha) \neq 0$*, et soit le polynôme* $R = PQ$*. Montrer que :*

$$\ker R(D_n) = \ker P(D_n).$$

5. *Pour tout polynôme* $P \in \mathbb{C}[X]$*, montrer que la matrice de l'endomorphisme* $P(D_n)$ *dans la base* $f_0, f_1, \ldots, f_n$ *est:*

$$M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \qquad \text{avec } m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i} P^{(j-i)}(\alpha) & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Attention : contrairement aux conventions habituelles, la numérotation des lignes et des colonnes commence à 0 .

Solution de l'exercice:

1: Pour tout $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, le polynôme $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n X^n$ a une infinité de racines, donc il est nul i.e. $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Donc $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est libre, donc c'est une base de E_n et $\dim(E_n) = n+1$.

2: La linéarité de la dérivation est connue. Et: $D_n(f_k) = \begin{cases} \alpha f_k + k f_{k-1} & \text{si } k \geqslant 1 \\ \alpha f_k & \text{si } k = 0 \end{cases}$
Donc, pour tout $f \in E_n$, on a $D_n(f) \in E_n$.

3: D'après la question précédente, la matrice de D_n dans la base $f_0, f_1, \ldots, f_n$ est:$M_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & n \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$. Par propriété du produit de matrices triangulaires ,

$$(M_n)^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & ? & & ? \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & ? \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix} \text{ donc } P(M_n) = \begin{pmatrix} P(\alpha) & & \cdots \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P(\alpha) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow P(\alpha) \neq 0.$$

Et ces matrices sont inversibles si et seulement si il n'y a pas de 0 sur la diagonale.

4: Comme $R = QP$, on a : $R(D_n) = Q(D_n) \circ P(D_n)$. D'après la question 3 l'endomorphisme $Q(D_n)$ est bijectif. On a donc :

$$R(D_n)(f) = 0 \Longleftrightarrow Q(D_n)(P(D_n)(f)) = 0 \Longleftrightarrow P(D_n)(f) = 0$$

5: Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ on a : $(D_n - \alpha \,\mathrm{Id})(f_k) = k f_{k-1}$ (en posant $f_k = 0$ si $k < 0$). Par récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a :

$$(D_n - \alpha \,\mathrm{Id})^j (f_k) = k(k-1)\cdots(k-j+1) f_{k-j}.$$

En particulier, si $j > n$, on voit que $(D_n - \alpha \,\mathrm{Id})^j = 0$.

La formule de Taylor pour un polynôme P de degré d donne $P = \sum_{i=0}^{d} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^i$ on en déduit que $P(D_n) =$

$\sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (D_n - \alpha \operatorname{Id})^i$.
Première méthode:

$$\begin{aligned}
P(D_n) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (D_n - \alpha \operatorname{Id})^i \text{ donc} \\
P(D_n)(f_k) &= f_k + P'(\alpha) k f_{k-1} + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} k(k-1) \times \cdots \times (k-n+1) f_{k-n} \\
P(D_n)(f_k) &= f_k + P'(\alpha) k f_{k-1} + \cdots + \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} k(k-1) \times \cdots \times 1 \times f_0 \\
P(D_n)(f_k) &= f_k + P'(\alpha) k f_{k-1} + \cdots + \frac{P^{(k-i)}(\alpha)}{(k-i)!} k(k-1) \times \cdots \times (i+1) f_i + \\
&\quad \cdots + \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} k(k-1) \times \cdots \times (k-n+1) f_0
\end{aligned}$$

D'où $m_{i,k} = \frac{P^{(k-i)}(\alpha)}{(k-i)!} k(k-1) \times \cdots \times (i+1) = \binom{k}{i} P^{(k-i)}(\alpha)$ si $i \leq k$ et $m_{i,k} = 0$ si $i > k$.
Le résultat annoncé est vrai avec la convention $\binom{k}{i} = 0$ si $i > k$.
Deuxième méthode: Point de vue matriciel: $P(D_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (D_n - \alpha \operatorname{Id})^i$ donc $mat_{(f_0,\ldots,f_n)}(P(D_n)) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} \left(mat_{(f_0,\ldots,f_n)}(D_n - \alpha \operatorname{Id})\right)^i$.

Or $M' = mat_{(f_0,\ldots,f_n)}(D_n - \alpha \operatorname{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & & \alpha \end{pmatrix}$ et on peut calculer $(M')^k$:
Soit u canoniquement associé à M' et $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique
On a $e_{n+1} \mapsto n e_n \mapsto n(n-1) e_{n-1} \ldots$ donc $u^k(e_{n+1}) = \begin{cases} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) e_{n-k+1} \text{ si } k \leq n+1 \\ = 0 \text{ si } k > n+1 \end{cases}$
ce qui donne la dernière colonne de $(M')^k$ et on obtient toutes les colonnes de même, ce qui permet d'obtenir le résultat.