

lundi 26 mai 2025

Exercice 1 (ccinp)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x\sqrt{n} = 1$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. (on note cette solution x_n).
2. Déterminer la limite de la suite (x_n) .
3. Déterminer la nature de la série $\sum x_n$.

Solution de l'exercice: 1: Posons $f(x) = x^n + x\sqrt{n} - 1$.

La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'(x) = nx^{n-1} + \sqrt{n} > 0$. La fonction est continue strictement croissante sur $[0, 1]$ donc réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f(0), f(1)] = [-1, \sqrt{n}]$ et $0 \in [-1, \sqrt{n}]$ donc il existe un et un seul réel x_n vérifiant $f(x_n) = 0$.

2: On a $\sqrt{n}x_n \leq 1$ donc $0 \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

3: Montrons que $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a $\sqrt{n}x_n = 1 - x_n^n$ et $0 \leq x_n^n \leq x_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}x_n = 1$ donc $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum x_n$ est une SATP divergente.

Exercice 2 (Ccp) Trouver les limites en $x = 0^+$, $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}^-$ de la fonction définie par $f(x) = \tan(x)^{\tan(2x)}$.

Solution de l'exercice: (On peut commencer par vérifier avec la relation $a^b = e^{b \ln(a)}$ que les formes demandées sont des formes indéterminées).

En 0 : $\tan(x)^{\tan(2x)} = e^{\tan(2x) \ln(\tan(x))}$. Or $\tan(2x) \sim_{x \rightarrow 0} 2x$ et

$\ln(\tan(x)) = \ln(x + o(x)) = \ln(x(1 + o(1))) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) \sim_{x \rightarrow 0} \ln(x)$ car $\ln(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0} -\infty$ et $\ln(1 + o(1)) \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$ (logarithme d'équivalent redémontré) donc $\tan(2x) \ln(\tan(x)) \sim_{x \rightarrow 0} 2x \ln(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

En $x = \frac{\pi}{4}$: posons $x = \frac{\pi}{4} + h$. On a $\tan(2x) \ln(\tan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right)$.

Or $\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) = \frac{-1}{\tan(2h)} \sim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2h}$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right)h + o_{h \rightarrow 0}(h) = 1 + 2h + o_{h \rightarrow 0}(h)$

On en déduit, en utilisant $\ln(1 + u) \sim_{u \rightarrow 0} u$ que $\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) = 2h + o_{h \rightarrow 0}(h)$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2h} \cdot 2h = -1$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(2x) \ln(\tan(x)) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(x)^{\tan(2x)} = \frac{1}{e}$.

En $x = \frac{\pi}{2}^-$: posons $x = \frac{\pi}{2} + h$ (avec $h < 0$)

On a $\tan(2x) \ln(\tan(x)) = \tan(\pi + 2h) \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} + h\right)\right) = \tan(2h) \times \ln\left(\frac{1}{-\tan(h)}\right) = -\tan(2h) \times \ln(-\tan(h)) \sim_{h \rightarrow 0} 2h \ln(-h) \rightarrow_{h \rightarrow 0} 0$ (logarithme d'équivalent idem précédemment) donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x)^{\tan(2x)} = 1$

Exercice 3 (ccinp) On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Établir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$ montrer que la série $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ montrer que la série $\sum_1 u_n^2$ diverge.

Solution de l'exercice:

1: On montre que $\forall n \geq 1, u_n \in]0, 1[$. De plus, si $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$ (étudier $x \mapsto \sin(x) - x$ ou utiliser la concavité de la fonction sinus) donc la suite (u_n) est décroissante.

Elle est minorée par 0 donc elle converge vers un réel $l \geq 0$.

En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on obtient $l = \sin(l)$ donc $l = 0$ car si $x > 0$, $\sin(x) < x$ (montrer que $g : x \mapsto \sin(x) - x$ est **strictement** décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

2: On a $u_{n+1} - u_n = u_n - \sin(u_n) = u_n - (u_n - \frac{u_n^3}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^3)) = \frac{u_n^3}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^3) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^3}{6}$. Or $u_n > 0$ donc $\frac{u_n^3}{6} > 0$ et les séries $\sum u_n^3$ et $\sum u_{n+1} - u_n$ sont de même nature. Or $\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -u_0$ donc la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge et la série $\sum u_n^3$ converge.

3: On a $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - \frac{u_n^3}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^3)}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o_{n \rightarrow +\infty}(u_n^2)\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{u_n^2}{6}$. Or $\frac{u_n^2}{6} > 0$ donc les séries $\sum u_n^2$ et $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ sont de même nature. Or $\sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge donc la série $\sum u_n^2$ diverge.

Exercice 4 (Ccinp) Donner un développement limité de la fonction arctangente à l'ordre 2 en $x = 1$. Donner l'asymptote en $+\infty$ de la courbe représentant la fonction définie par $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$ et préciser la position par rapport à cette asymptote en $+\infty$ (on pourra écrire $f(x)$ sous forme $ax + b + \frac{c}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$)

Solution de l'exercice:

1: Appliquons la formule de Taylor-Young à $g(x) = \arctan(x)$. On a $g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}g''(1)(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$. Or $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $g''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ donc $\arctan(x) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$, c'est-à-dire $\arctan(1+h) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$. Or $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$ donc $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $f(x) = \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f(x) - \left(\frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$. La droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2}$ est donc asymptote à C_f et $f(x) - \left(\frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2}\right) > 0$ au voisinage de $+\infty$. La courbe est donc au-dessus de son asymptote.

Exercice 5 (Ccinp) Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

1. Etudier la suite (u_n) .

2. On pose $p_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$. Montrer que la suite (p_n) converge.

3. En déduire que la suite $(2^n u_n)$ converge.

Solution de l'exercice : 1: On montre par récurrence que $u_n \in [0, 1]$, puis $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est décroissante et minorée donc converge vers $l \in [0, 1]$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(u_n + u_n^2) = \frac{1}{2}(l + l^2)$ donc par passage à la limite, $l = \frac{1}{2}(l + l^2)$ donc $l = 0$ ou $l = 1$ donc $l = 0$ car $u_n \leq u_0 < 1$.

2: On a $\ln(p_n) = \sum_{k=0}^n \ln(1 + u_k)$ et $\ln(1 + u_k) \sim_{n \rightarrow +\infty} u_k > 0$ donc la suite $\ln(p_n)$ converge si et seulement si la

série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. Or $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{2} |1 + u_n| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ donc la série $\sum u_n$ converge donc la suite $\ln(p_n)$ converge vers un réel l donc la suite (p_n) converge vers e^l .

3: On a $p_{n-1} = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + u_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2u_{k+1}}{u_k} = \frac{2^n u_n}{u_0}$ donc $2^n u_n = u_0 p_n$ donc la suite $(2^n u_n)$ converge.

Exercice 6 (Ccinp) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y), f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

1. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$.

(a) Montrer que f est impaire et 2-périodique. En déduire que f est bornée.

(b) Montrer que $f(2x) = 2f(x)$. En déduire la nullité de f .

2. Déterminer f dans le cas général.

Solution de l'exercice:

Remarque $x \mapsto ax + b$ est

1a: On a $0 = f(0) = f\left(\frac{x + (-x)}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ donc $f(-x) = -f(x)$. On en déduit que $f(x+2) - f(x) = f(x+2) + f(-x) = 2f\left(\frac{x+2+(-x)}{2}\right) = 2f(1) = 0$ donc f est impaire et 2-périodique. La fonction f est continue sur le segment $[0, 2]$ donc bornée sur $[0, 2]$. Or $f([0, 2]) = f(\mathbb{R})$ car f est 2-périodique donc f est bornée.

1b: On a $f(2x) = f(2x) + f(0) = 2f\left(\frac{2x+0}{2}\right) = 2f(x)$. Supposons qu'il existe x tel que $f(x) \neq 0$. On montre par récurrence que $f(2^n x) = 2^n f(x)$. Or la suite $(2^n f(x))$ n'est pas bornée, ce qui contredit le fait que f est bornée donc la fonction f est nulle.

2: On ne suppose plus maintenant que $f(0) = f(1) = 0$. Soit g la fonction affine vérifiant $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1)$ (par deux points il passe une droite ou $g : x \mapsto \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}x + f(0)$)

et posons $h = f - g$. On a $g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$ (à vérifier en posant $g(x) = ax + b$) donc $h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(h(x) + h(y))$ et $h(0) = h(1) = 0$. La fonction h est donc nulle. On en déduit que $f = g$ donc que f est une fonction affine.

Exercice 7 (centrale)

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $nx = \cos(x)$ admet une et une seule solution dans $[0, 1]$ que l'on notera x_n .

2. Etudier la convergence et la monotonie de la suite (x_n) .

3. Démontrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$ puis trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ (on pourra écrire $x_n = \frac{1}{n} + v_n$).

4. Donner un développement asymptotique à 3 termes de x_n .

Solution de l'exercice:

1: La fonction $x \mapsto nx - \cos(x)$ est dérivable de dérivée $n + \sin(x) > 0$ sur $[0, 1]$. Elle est donc continue et strictement croissante et induit une bijection de $[0, 1]$ sur $[-1, n - \cos(1)]$. Or $n - \cos(1) > 0$ donc $0 \in [-1, n - \cos(1)]$. Il existe donc un unique réel x_n vérifiant $nx - \cos(x) = 0$.

2: On a donc $nx_n - \cos(x_n)$ donc $|nx_n| \leq 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n) = 0$.

Posons $f_n(x) = nx - \cos(x)$. On a $f_n(x_n) = 0$ et $f_n(x_{n+1}) = nx_{n+1} - \cos(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) < 0$. La fonction

f_n étant strictement croissante, on en déduit $x_n > x_{n+1}$.

3: De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(x_n)) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$ donc $x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$.

On peut donc poser $x_n = \frac{1}{n} + v_n$ avec $v_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n})$. En reportant dans l'équation, $1 + nv_n = \cos(x_n) = 1 - \frac{1}{2}x_n^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(x_n^2)$ donc $nv_n \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x_n^2$ donc $v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n^3}$ donc $x_n - \frac{1}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2n^3}$ et on en déduit que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^3})$.

4: On peut continuer: $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + w_n$ avec $w_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^3})$. En reportant dans l'équation, $1 - \frac{1}{2n^2} + nw_n = \cos(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^3})) = 1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^3}))^2 + \frac{1}{4!}(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^3}))^4 + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^4})$. donc $1 - \frac{1}{2n^2} + nw_n = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^4} + \frac{1}{4!} \frac{1}{n^4} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^4})$ donc $nw_n = \frac{13}{24} \frac{1}{n^4} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^4})$ donc $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^3} + \frac{13}{24} \frac{1}{n^5} + o_{n \rightarrow +\infty}(\frac{1}{n^5})$.

Exercice 8 (Mines ponts) Soit f et g deux fonctions continues de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On pose $A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$.

1. Soit E une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup(E)$ si et seulement si M est un majorant de E et il existe une suite d'éléments de E qui converge vers M .
2. Montrer que $A \neq \emptyset$ et que A admet un minimum et un maximum.
3. En déduire l'existence d'un réel $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Solution de l'exercice: 1: ($\Rightarrow$) Soit $M = \sup(E)$, c'est-à-dire que M est le plus petit majorant de E : M est majorant de E .

$\forall \varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est pas majorant de E donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E$, $M - \varepsilon < x$.

On applique ce résultat à $\varepsilon = \frac{1}{n}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E$, $M - \frac{1}{n} < x_n$. Or $x_n \in E$ donc $x_n \leq M$. Par encadrement, la suite (x_n) converge vers M .

($\Leftarrow$) On suppose M est majorant de E et il existe une suite (x_n) de E qui converge vers M .

Soit M' un majorant de E . On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq M'$ et en passant à la limite, $M \leq M'$ donc M est le plus petit majorant de E .

2: Soit $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = f(x) - x$. Comme f est continue sur $[0; 1]$, φ est aussi continue sur $[0; 1]$. Or $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ car $f(0) \in [0; 1]$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0; 1]$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, comme $\varphi(0)\varphi(1) \leq 0$ et que φ est continue sur $[0; 1]$, il existe un réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$, ce qui justifie que $\alpha \in A$ donc $A \neq \emptyset$.

A est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par 1 et minorée par 0. La propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ montre que A admet une borne supérieure $M \leq 1$ et une borne inférieure $m \geq 0$. D'après la première question (caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M . On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n$: (R) et, en passant à la limite dans cette relation (R) on a $f(M) = M$. Ainsi, $M \in A$ et M majore A assure que M est le maximum de A . De même, m est le minimum de A .

b. Posons $h = f - g$, de sorte que h est continue sur $[0; 1]$ par opérations. Comme $f \circ g = g \circ f$, en l'appliquant en M , on a $f(g(M)) = g(f(M)) = g(M)$ donc $g(M) \in A$ ce qui montre que $g(M) \leq M = \text{Max}(A)$. Ainsi, $h(M) = f(M) - g(M) = M - g(M) \geq 0$. De même, $f(g(m)) = g(f(m)) = g(m)$ donc $g(m) \in A$ ce qui montre que $g(m) \geq m = \text{Min}(A)$. Ainsi, $h(m) = f(m) - g(m) = m - g(m) \leq 0$. à nouveau, par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque h est continue sur $[m, M]$ et $h(m)h(M) \leq 0$, il existe un réel $c \in [m, M] \subset [0; 1]$ tel que $h(c) = 0$, ce qui revient à $f(c) = g(c)$.

Exercice 9 (IMT) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq e + |u_1|$.
2. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite l .
3. Donner un équivalent en $+\infty$ de $u_n - l$.

4. Donner un développement asymptotique de u_n de la forme $a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Solution de l'exercice: 1: $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$ donc $u_2 = 1 + \frac{u_1}{2}$, $u_3 = 1 + \frac{1+\frac{u_1}{2}}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{u_1}{3 \times 2}$.

$u_4 = 1 + \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{u_1}{3 \times 2}}{4} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{u_1}{4 \times 3 \times 2}$. On montre par récurrence que

$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \times (n-1)} + \dots + \frac{1}{n \times (n-1) \times \dots \times 3} + \frac{u_1}{n \times (n-1) \times \dots \times 2}$ et $n \geq 1$, $n(n-1) \geq 2 \times 1, \dots, n \times (n-1) \times \dots \times 3 \geq (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 1$ donc

$|u_n| \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times (n-2)} + \frac{|u_1|}{n!} \leq e + |u_1|$ car si $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}$, on a $S_{n-2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times (n-2)}$

et (S_n) converge vers e et est croissante car $\frac{1}{n!} \geq 0$.

2: (u_n) est bornée donc $\frac{u_n}{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ donc $u_{n+1} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$. La suite (u_n) converge donc vers 1.

3: On a donc $u_n = 1 + v_n$ avec $v_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ et en reportant dans la relation de récurrence, $1 + v_{n+1} = 1 + \frac{1 + v_n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{v_n}{n+1}$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{v_n}{n+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}$ donc $v_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ et $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

4: a: Posons $u_n = 1 + \frac{1}{n} + w_n$ avec $w_n = o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n}\right)$. En reportant dans la relation de récurrence, $1 + \frac{1}{n+1} + w_{n+1} =$

$$1 + \frac{1 + \frac{1}{n} + w_n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{w_n}{n+1}$$

$$\text{donc } w_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{w_n}{n+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \text{ donc } u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b: En réappliquant la même méthode, on obtient: $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 10 (Centrale):

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = t + \frac{t^3}{3}$ est une bijection.

2. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1 + f^2(t)} dt?$$

Solution de l'exercice:

1: Appliquer le th de la bijection strictement monotone et continue à g .

2: Analyse: Si f est solution, alors $f(0) = 1$. Par ailleurs $x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1 + f^2(t)} dt$ est la primitive d'une fonction

continue donc f est de classe C^1 et $f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{1 + f^2(x)}$ donc $f'(x) + f^2(x) f'(x) = e^{-x^2}$ et donc $f(x) + \frac{f^3(x)}{3} =$

$\frac{4}{3} + \int_0^x e^{-t^2} dt$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = t + \frac{t^3}{3}$. La fonction g est une bijection strictement croissante et

continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On a donc $f(x) = g^{-1}\left(\frac{4}{3} + \int_0^x e^{-t^2} dt\right)$. Synthèse: Posons $f(x) = g^{-1}\left(\frac{4}{3} + \int_0^x e^{-t^2} dt\right)$.

Cette fonction est de classe C^1 comme composée de fonctions de classe C^1 donc f est continue. (on applique le théorème sur la dérivabilité de la réciproque à fonction g est de classe C^1 et vérifiant $\forall x, g'(x) > 0$ donc g^{-1} est

de classe C^1). La fonction f est bornée: $a = \frac{4}{3} \leq \frac{4}{3} + \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \frac{4}{3} + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = b$ et $g^{-1}([a, b])$ est bornée

car g^{-1} est continue. En appliquant g , on $f(x) + \frac{f^3(x)}{3} = \frac{4}{3} + \int_0^x e^{-t^2} dt$ et donc $f'(x) + f^2(x) f'(x) = e^{-x^2}$ donc

$$f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{1 + f^2(x)}. \text{ On a de plus } f(0) = 1 \text{ donc en intégrant, } f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1 + f^2(t)} dt.$$