# mercredi 28 mai après-midi 2025

**Exercice 1** *(ccinp) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$.*

1. *Déterminer la limite de la suite $(I_n)$.*
2. *Soit $L = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}du$. Justifier l'existence de $L$ et justifier que $I_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{L}{n}$.*
3. *Justifer que $L = \dfrac{\pi^2}{12}$ (on admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$).*

**Solution de l'exercice:** 1: Appliquons le théorème de convergence dominée sur $[0,1[$ à $f_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$.
- On a, pour $t \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ donc la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle.
- Les fonctions $f_n$ est sont continues donc CPM sur $[0,1[$.
- $|f_n(t)| \le \ln(2) = \varphi(t)$. La fonction $\varphi$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, $(I_n)$ converge vers $\int_0^1 0dt = 0$.

2: On a $\ln(1+u) \sim_{u\to0} u$ donc $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0,1]$ donc l'intégrale $L$ converge.

Si $n \ge 1$, par le changement de variable $C^1$ et bijectif strictement croissant de $]0,1]$ dans $]0,1]$ défini par $u(x) = x^n$, on a $nI_n = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t^n)}{t^{n-1}} nt^{n-1}dt = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}du$. Posons $g_n(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}u^{\frac{1}{n}}$. On a $u \in ]0,1]$ donc $u^{\frac{1}{n}} \le u|$ et $g_n(u)| \le \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0,1]$. Le téhorème de convergence dominée donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}du = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}du = L$ donc $I_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{L}{n}$.

3: Pour $u \in ]0,1[$, $\ln(1+u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}u^n$ donc $\dfrac{\ln(1+u)}{u} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}u^{n-1}$. Posons $v_n(u) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}u^{n-1}$.
- La fonction $v_n$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1[$.
- La série de fonction $\sum v_n$ converge simplement vers $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ sur $]0,1[$
- $\int_0^1 |v_n(u)|\,du = \dfrac{1}{n^2}$ donc, comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, le th d'interversion $\sum - \int$ donne

$\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u}du = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 v_n(u)\,du = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = L$.

On a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} - L = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p)^2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ donc $L = \dfrac{\pi^2}{12}$.

**Exercice 2** *(ccinp) Déterminer le rayon de convergence $R$ et la somme $S(x)$ de la série entière $\sum\limits_{n\ge2} \dfrac{x^n}{n+(-1)^n}$.*

**Solution de l'exercice:** On a $\dfrac{1}{n+(-1)^n} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$ donc $\sum \dfrac{x^n}{n+(-1)^n}$ et $\sum \dfrac{x^n}{n}$ ont le même rayon de convergence donc $R = 1$. La série entière $\sum\limits_{n\ge1} \dfrac{x^n}{n+(-1)^n}$ est la somme des séries entières $\sum\limits_{p\ge1} \dfrac{x^{2p}}{2p+1}$ et $\sum\limits_{p\ge1} \dfrac{x^{2p+1}}{2p}$ (toutes deux de rayon de convergence égal à 1). On sait que, si $|x| < 1$, $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ et $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ donc $\ln(1-x)+\ln(1+x) = -2\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2p}}{2p}$ donc $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2p+1}}{2p} = -\dfrac{x}{2}\ln(1-x^2)$ et $\ln(1+x)-\ln(1-x) = 2\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1}$ donc $\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{2x} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2p}}{2p+1}$ et $\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x}{2x} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2p}}{2p+1}$ et donc $S(x) = -\dfrac{x}{2}\ln(1-x^2) + \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x}{2x}$ pour $x \ne 0$ et $S(0) = 0$.

**Exercice 3** *(ccinp)*

1. *Calculer* $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2. *Donner le développement en série entière de la fonction arctangente.*
   *En déduire que* $\pi = 8\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$.

3. *Déterminer avec la calculatrice une valeur de* $n$ *à partir de laquelle* $8\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1}$ *est une approximation de* $\pi$ *à* $10^{-10}$ *près.*

**Solution de l'exercice :** 1:Posons $a = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On a $1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{2a}{1-a^2}$ donc $a^2+2a-1=0$ donc $a=-1\pm\sqrt{2}$. Or $a>0$ car $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > \tan(0) = 0$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$

2: Si $|x|<1$, alors $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)\,x^{2n}$ donc par intégration du dse,

$\forall x\in\left]-1,1\right[,\ \arctan(x)-\arctan(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

On a $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$ et $\frac{\pi}{8}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\frac{\pi}{8} = \arctan\left(\sqrt{2}-1\right)$ oret $0<\sqrt{2}-1<2-1=1$

donc $\frac{\pi}{8} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$.

3: La série $\sum\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$ est spéciale alternée: si $a_n = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{2n+1} > 0$ alors
$u_n = (-1)^n a_n$ est alternée et
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+3}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3} < 1$ donc la suite $(|u_n|)$ est décroissante et de limite nulle donc on peut utiliser la majoration du reste d'une série spéciale alternée:

$$\left|\pi-8\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1}\right| \leq \left|8\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3}\right| = 8\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3}}{2n+3} = u_{n+1}.$$

La calculatrice donne $u_{11}\approx 5.464\,1\times 10^{-10}$ donc si $n\geq 10$ alors $\left|\pi-8\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right| \leq 10^{-10}$.

**Exercice 4** *Pour* $n\in\mathbb{N}$, *soit* $a_n$ *le nombre d'entier* $k\in[[0,n]]$ *qui ne sont pas multiples de* 3.

1. *Donner le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n x^n$.

2. *Calculer la somme de cette série entière.*

**Solution de l'exercice:**
1: On a $a_1 = 1$ et $(a_n)$ est une suite croissante donc $1\leq a_n\leq n+1$.
Soit $R_1,$ $R$ et $R_2$ les rayons de convergence des séries entières $\sum x^n$, $\sum a_n x^n$ et $\sum(n+1)\,x^n$.
On a donc $R_1\geq R\geq R_2$. Or $R_2 = R_1 = 1$ donc $R=1$.
2: On a $card\left([[0,3k]]\right) = 3k+1$. Les multiples de 3 dans $[[0,3k]]$ sont les $3i$, $i\in[[0,k]]$. Il y en a donc $k+1$.
On en déduit que $a_{3k} = 2k$

$$\begin{cases} a_{3k} = 2k \\ a_{3k+1} = 2k+1 \\ a_{3k+2} = 2k+2 \end{cases}.$$

On en déduit que, pour $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}2k\left(x^{3k}+x^{3k+1}+x^{3k+2}\right)+\sum\limits_{k=0}^{+\infty}x^{3k+1}+2x^{3k+2} = \left(1+x+x^2\right)\sum\limits_{k=0}^{+\infty}k\left(x^3\right)^k +$

$(x+2x^2)\sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k}$.

Or $\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(x^3\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(x^3\right)^k = x^3\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(x^3\right)^{k-1}$ donc on peut poursuivre le calcul avec la série géométrique et sa dérivée appliquée à $u=x^3$.

**Exercice 5** *(centrale) On pose* $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ *et* $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$.

1. *Justifier l'existence de $S$ et déterminer l'ensemble de définition de $f$.*

2. *Pour $x\in\,]-1,1[$, exprimer $f(x)$ au moyen des fonctions usuelles.*

3. *En déduire la valeur de $S$.*

**Solution de l'exercice:**

1. $R=1$ et $D_f=[-1,1]$. D'après le cours, $f$ est dérivable terme à terme sur $]-1,1[$ et $f'(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$. Par ailleurs, $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ et $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ donc $\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}+1\right)$ $2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)}$ donc $f'(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ donc $f(x)-f(0)=\int_0^x\ln(1+t)-\int_0^x\ln(1-t)\,dt=\int_0^x\ln(1+t)+\int_0^{-x}\ln(1+u)\,du$ donc (IPP) $f(x)=\left[(t+1)\ln(t+1)-(t+1)\right]_0^x+\left[(t+1)\ln(t+1)-(t+1)\right]_0^{-x}$ donc $f(x)=(x+1)\ln(x+1)+(1-x)\ln(1-x)$.

2. Montrons que la fonction $f$ est continue sur $[-1,1]$: Posons $u_n(x)=\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$. La fonction $u_n$ est bornée sur $[-1,1]$ et $\|u_n\|_\infty=\sup_{x\in[-1,1]}|u_n(x)|=\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ donc la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$. Chaque fonction $u_n$ étant continue, la fonction $f$ est continue sur $[-1,1]$. On a donc $f(1)=S=\lim_{x\to1^-}f(x)=2\ln(2)$ car $\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=\lim_{u\to0^+}u\ln(u)=0$.

**Exercice 6** *(Ccinp) On pose* $u_n(x)=\frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

1. *Donner le domaine de convergence de* $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.

2. *Démontrer que la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$.*

**Solution de l'exercice:**

1: On commence par le calcul classique (cf logarithmes d'équivalents)

On a $u_n(x)=\frac{\ln\left(n^2\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\right)}{n^2\ln(1+n)}=\frac{2\ln(n)}{n^2\ln(1+n)}+\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)}{n^2\ln(1+n)}$. On a $\left|\frac{2\ln(n)}{n^2\ln(1+n)}\right|\leq\frac{2}{n^2}$ et $\frac{\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)}{n^2\ln(1+n)}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n(x)$ converge donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $0<a<b$. Les fonctions $u_n$ sont de classe $C^1$ sur $[a,b]$ et $u_n'(x)=\frac{1}{\ln(1+n)}\times\frac{2x}{1+n^2x^2}$. On a $|u_n'(x)|\leq\frac{2b}{\ln(1+n)(1+n^2a)}=\alpha_n$. On en déduit que $\|u_n'\|_\infty\leq\alpha_n$ avec $\alpha_n\sim_{n\to+\infty}\frac{2b}{an^2\ln(1+n)}=o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum\|u_n'\|_\infty$ converge. La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.et la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$ donc $f$ est de classe $C^1$ sur $[a,b]$ donc sur $]0,++\infty[$ et $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$. Pa parité, $f$ est de classe $C^1$ sur $]-\infty,0[$.

**Exercice 7** *Mines On pose, pour $\theta$ réel et $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$.*

1. *Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.*
2. *Pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$, justifier que la série $\sum nz^n$ converge et préciser sa somme.*
3. *En déduire la somme de la série $\sum u_n$.*

**Solution de l'exercice:** 1: Posons $u_n = n^2 \dfrac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$. On a $|n^2 u_n| \leq \dfrac{n^3}{2^n} \to_{n\to+\infty} 0$ donc $u_n = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge absolument.

2: Posons, pour $|x| < 1$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. On a $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. **Ce calcul ne vaut que pour $x$ réel.**

Pour calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nz^n$ il faut étendre cette relation à $z \in \mathbb{C}$.

En utilisant le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ par elle même pour $|z| < 1$, on obtient de même, $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n z^n$ avec $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 1 \times 1 = n+1$, donc $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$ donc $\dfrac{z}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nz^n$.

On a $\dfrac{n \sin^2(n\theta)}{2^n} = \dfrac{n \frac{1-\cos(2n\theta)}{2}}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{2^n} - \dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n}\right) = \frac{1}{2}(v_n + w_n)$.avec $v_n = \dfrac{n}{2^n}$ et $w_n = \dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n}$.

On pose $z_0 = \dfrac{e^{i2\theta}}{2}$, on a $\dfrac{\cos(2n\theta)}{2^n} = \mathrm{Re}(z_0^n)$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{Re}(z_0^n) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(z_0)^n\right)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On pose $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nz^n$. On a donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)^n = f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)$ donc

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n} = \mathrm{Re}\left(f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right)$ d'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \mathrm{Re}\left(f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right)\right)$. Or $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$ et

$$f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) = \frac{\frac{e^{i2\theta}}{2}}{\left(1 - \frac{e^{i2\theta}}{2}\right)^2} = \frac{2e^{i2\theta}}{4 - 4e^{i2\theta} + e^{i4\theta}} = \frac{2e^{i2\theta}\left(4 - 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}\right)}{\left(4 - 4e^{i2\theta} + e^{i4\theta}\right)\left(4 - 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}\right)} \text{ donc}$$

$$f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) = \frac{8e^{i2\theta} - 8 - 2e^{-i2\theta}}{33 - 20\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right) + 4\left(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}\right)} = \frac{8e^{i2\theta} - 8 - 2e^{-i2\theta}}{33 - 40\cos(2\theta) + 8\cos(4\theta)} \text{ et}$$

$\mathrm{Re}\left(f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right) = \dfrac{-8 + 6\cos(2\theta)}{33 - 40\cos(2\theta) + 8\cos(4\theta)}$ d'où $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 + \dfrac{4 - 3\cos(2\theta)}{33 - 40\cos(2\theta) + 8\cos(4\theta)}$.

**Exercice 8** *(mines ponts) Montrer que $\dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$.*

**Solution de l'exercice:** On a, pour $x \in ]-1, 1[$, $\arctan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$. On applique le théorème de la double limite avec $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$.

1: Pour $n$ fixé, on a $\lim\limits_{x\to1} u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$.

2: On vérifie que pour $x \in [0, 1[$ fixé, $\sum u_n(x)$ est une série spéciale alternée (laissé au lecteur)

On en déduit que $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \dfrac{-x^{2n+3}}{2n+3} \leq \dfrac{1}{2n+3}$ donc $\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1[} |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{2n+3}$ donc $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.

Le théorème de la double limite permet de conclure.

**Exercice 9** *(Mines ponts): Soit $f$ une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On définit la suite de fonctions $(f_n)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$.*

1. *Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.*
2. *Déterminer la somme de cette série de fonctions à l'aide d'une équation différentielle..*

**Solution de l'exercice:**

1. Soit $a > 0$.. Etudions directement la convergence normale sur $[-a, a]$ qui servira dans la deuxième question. La fonction $f$ est continue sur le segment $[-a, a]$ donc bornée. Posons $M = \sup_{[-a,a]} |f|$.
Soit $x \in [-a, a]$. On a $f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ donc $|f_1(x)| \leq M|x - a|$.
Montrons par récurrence que $\forall x \in [-a, a]\,, |f_n(x)| \leq \dfrac{Mx^n}{n!}$.
C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
On a $|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n(t)\,dt\right| \leq \left|\int_0^x |f_n(t)|\,dt\right| \leq \left|\int_0^x \dfrac{Mt^n}{n!}dt\right| = \dfrac{M|x^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \dfrac{Ma^{n+1}}{(n+1)!}$ (comme $x$ peut négatif, il faut ajouter $||$ à l'extérieur du membre de droite de l'inégalité triangulaire)
Soit $x \in [-a, a]$. La série $\sum \dfrac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$ converge donc la série $\sum f_n(x)$ converge (absolument). La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement.
On a donc $\|f_n\|_\infty^{[-a,a]} = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| \leq \dfrac{Ma^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{a^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[-v, a]$.

2. Posons $g = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. On veut utiliser le fait que $f'_{n+1} = f_n$ et le théorème de dérivation terme à terme.
On pose donc $u = g - f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ (car $f_0 = f$ n'est supposée que continue). Soit $a > 0$.
- La série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers $u$ (d'après Q1)
- chaque $f_n, (n \geq 1)$ est de classe $C^1$ et $f'_n = f_{n-1}$
- la série $\sum\limits_{n\geq 1} f'_n = \sum f_{n_{n-1}}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, a]$ vers $g$.
La fonction $u$ est donc de classe $C^1$ sur $[0, a]$ et $u' = g = u + f$.
Les solutions de $y' = y$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$.
La méthode de variation de la constante appliquée à l'équation $y' - y = f$ conduit à poser $y_p(x) = \lambda(x)e^x$ et en reportant dans l'équation, on aboutit à $\lambda'(x) = e^{-x}f(x)$ donc $y_p(x) = e^x \int_0^x f(t)e^{-t}dt$ est solution particulière.
On a donc $u(x) = e^x \times \left(\lambda + \int_0^x f(t)e^{-t}dt\right)$. Or $u(0) = 0$ car $f_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$ donc $\lambda = 0$ et donc $u(x) = e^x \times \int_0^x f(t)e^{-t}dt$ donc $g(x) = f(x) + e^x \times \int_0^x f(t)e^{-t}dt$.

**Exercice 10** *(Mines ponts)*

1. *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 0$ si $|x| > \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = n - n^2|x|$ si $|x| \leq \frac{1}{n}$.*
2. *Etudier la limite de la suite de terme général $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,g(x)\,dx$ ou $g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

**Solution de l'exercice:** 1: La fonction $f_n$ est paire. Elle est affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ avec $f_n(0) = n$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
- La suite $(f_n(0))$ ne converge pas
- Si $x \neq 0$, il existe $n_0$ tel que $\frac{1}{n_0} < |x|$ et pour $n \geq n_0$, on a $f_n(x) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions $(f_n)$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction nulle notée $f$..
Pour $n$ fixé et $x \neq 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|$ donc $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = f_n(0) = n \leq$

$\sup_{t\in\mathbb{R}^*}|f_n(t)-f(t)|$ donc la suite $\left(\sup_{t\in\mathbb{R}^*}|f_n(t)-f(t)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la suite de fonctions $(f_n)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^*$

2: L'intégrale $I_n$ est définie et $I_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,g(x)\,dx$. Montrons que la suite $(I_n)$ converge vers $g(0)$. On remarque que $\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = 1$ (aire du triangle). Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de $g$ entraîne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x-0| \le \alpha$, alors $|g(x)-g(0)| \le \varepsilon$. Si $\frac{1}{n} \le \alpha$ (soit $n \ge \frac{1}{\alpha}$), on aura, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $|g(x)-g(0)| \le \varepsilon$ donc $|I_n - g(0)| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,g(x)\,dx - g(0)\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,g(x)\,dx - g(0)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,(g(x)-g(0))\,dx\right|$

donc $|I_n - g(0)| \le \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)\,(g(x)-g(0))|\,dx \le \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)|\,dx = \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx = \varepsilon$. Comme $\varepsilon$ est quelconque, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(I_n) = g(0)$.

Remarque: Au lieu de considérer des valeurs absolues, il est peut-être plus simple d'intégrer la double inégalité $f_n(x) \times (g(0)-\varepsilon) \le f_n(x) \times g(x) \le f_n(x) \times (g(0)+\varepsilon)$