Epreuve math 2 de centrale

I Description de l'épreuve

L'épreuve centrale 2 se déroule en deux temps:

- une préparation d'environ 25 mn avec un ordinateur et les fiches d'aide à disposition. Pendant cette préparation, l'examinateur peut passer voir où vous en êtes et jeter un coup d'oeil à vos scripts python.
- un passage au tableau de 25 mn pour développer l'aspect mathématique.

En général, la partie informatique consiste à mettre en évidence de manière empirique des résultats qu'on demande ensuite de démontrer.

L'objectif minimal du candidat doit être (à mon avis) de montrer qu'il a une certaine maîtrise de python et des bibliothèques numpy, scipy, matplotlib et random.

D'après ce que j'ai compris, l'informatique est noté sur 5 et les maths sur 15 mais je pense que l'effet produit par quelqu'un qui n'a vraiment rien fait en info se répercute sur la note de manière plus importante que juste la perte de 5 points.

II Comment préparer la partie info

Je pense qu'une bonne façon de préparer la partie informatique de cette épreuve consiste à prendre une à une les instructions des fiches d'aides et essayer de programmer des variantes de ce qui est proposé en exemple (en utilisant des copié-collés).

Nous ferons un peu ça en TD mais vous pouvez commencer à vous entraîner.

Voici deux énoncés qui vous permettront de ne pas travailler dans le vide.

III Énoncés

Exercice 1 (Centrale 2) On considère deux matrices M_n et T_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $(M_n)_{i,j} = \inf(i, j)$ et T_n triangulaire supérieure avec des 1 sur le triangle supérieur, diagonale comprise.

1. Ecrire un script python permettant l'affichage de M_n pour $2 \leq n \leq 10$. Calculer $\det(M_n)$ pour $2 \leq n \leq 10$.
2. Ecrire un script python permettant l'affichage de T_n pour $2 \leq n \leq 10$, puis de $T_n^T \times T_n$. Démontrer mathématiquement les résultats observés.
3. Montrer que M_n est diagonalisable et de valeurs propres strictement positives. Montrer que $\max_{\lambda \in \text{sp}(M_n)} \lambda \geq \frac{n+1}{2}$.
4. Justifier que M_n est inversible et calculer M_n^{-1} .

Exercice 2 (centrale 2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que T est une variable aléatoire suivant une loi uniforme de $[[1, k]]$ et $X_1, \dots, X_k$ des variables aléatoires de même loi binômiale $\mathcal{B}(100, \frac{1}{3})$. On suppose que $T, X_1, \dots, X_k$ sont mutuellement indépendantes. On définit la variable aléatoire Y par $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

(a) Ecrire une fonction qui simule la valeur de Y_1 .

(b) Donner une approximation de l'espérance de Y pour $k \in \{10, 30, 100, 300, 1000\}$. Que constate-t-on?

2. Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = \llbracket 1, k \rrbracket$. On considère $k + 1$ variables aléatoires $(X_i)_{0 \leq i \leq k}$ suivant une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire Y par $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

On suppose que X_i est d'espérance finie. Montrer que Y est d'espérance finie et donner une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(X_i)$ et $E(T)$.