mercredi 28 mai matin 2025

Exercice 1 *ccinp 23 Pour $n \in \mathbb{N}$, en cas de convergence, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$.*

1. *Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n} I_{n-1}$.*
3. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.*
   - *Trouver une relation entre J_n et J_{n-1}.*
   - *Calculer J_1. En déduire que une expression de $\mathrm{I_n}$ pour $n \geq 1$.*

Solution de l'exercice:

1: Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$et $f_n(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{nt}}{(e^t)^{n+1}} = e^{-t}$.

Par comparaison, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$car $t \mapsto e^{-t}$ l'est. Ainsi, I_n existe

2: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$, on pose $u : t \mapsto -\frac{(1+e^t)^{-n}}{n}$ et $v : t \mapsto e^{(n-1)t}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$avec $\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ car $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e^{-t}}{n}$ d'où, par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, $\mathrm{I_n} = \int_0^{+\infty} \mathrm{u'(t)}v\mathrm{(t)dt} = [\mathrm{u(t)}v\mathrm{(t)}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{u(t)}v'\mathrm{(t)dt}$, ce qui donne bien la relation $I_n = \frac{1}{n(1+1)^n} + \frac{n-1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(n-1)t}}{(1+e^t)^n} dt = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$.

3: a: Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = nI_n = \frac{1}{2^n} + (n-1)I_{n-1}$ donc $J_n = J_{n-1} + \frac{1}{2^n}$.

b: On calcule $\mathrm{J_1} = \mathrm{I_1} = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \mathrm{dt} = \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. Ainsi, avec la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = J_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (J_{k+1} - J_k) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 1 - \frac{1}{2^n}$ donc $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

e. Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, on a $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 2 *(Ccinp) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.*

Solution de l'exercice :$S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1+2k/n}} = \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ avec $a = 0$, $b = 1$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+2t}}$. D'après le cours sur les sommes de Riemann, $S_n \to_{n \to +\infty} \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+2t}} dt = \left[\sqrt{1+2t}\right]_0^1 = \sqrt{3} - 1$.

Exercice 3 *(ccinpp) Pour quelle valeur du couple (a, b) la série de terme général $u_n = e^{\frac{1}{n}} + a\cos\left(\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$ est-elle convergente?*

Solution de l'exercice: On a $u_n = e^{\frac{1}{n}} + a\cos\left(\frac{1}{n}\right) + b\left(\ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)$ donc
$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + a\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + b\left(\ln(2) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2}\right) + o \sim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc
$u_n = (1 + a + b\ln(2)) + \left(1 + \frac{b}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{a}{2} - \frac{b}{4}\right)\frac{1}{n^2} + o \sim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- Si $(1 + a + b\ln(2)) \neq 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ donc la série $\sum u_n$ diverge.
- Si $(1 + a + b\ln(2)) = 0$ et $\left(1 + \frac{b}{2}\right) \neq 0$ alors $u_n \sim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{b}{2}\right)\frac{1}{n}$ de signe constant donc la série $\sum u_n$ diverge.

- Si $(1+a+b\ln(2))=0$ et $\left(1+\frac{b}{2}\right)=0$ alors $u_n = O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n$ converge.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $b=-2$ et $a=-1-2\ln(2)$.

Remarque *On aurait pu se contenter de restes en* $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *et on aurait raisonné de même à partir de* $u_n = (1+a+b\ln(2)) + \left(1+\frac{b}{2}\right)\frac{1}{n} + O\sim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$*, ce qui évite de calculer le coefficient de* $\frac{1}{n^2}$*.*

Exercice 4 *(Ccinp) Soit* $a>0$*. Etudier la convergence de la série de terme général* $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$*.*

Solution de l'exercice: On a $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(\frac{n}{n+a}\right)} = e^{-n^2\ln\left(\frac{n+a}{n}\right)} = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{a}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-na+o_{n\to+\infty}(n)}$. On a donc $\dfrac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = n^2 u_n = e^{2\ln(n)}e^{-na+o_{n\to+\infty}(n)} = e^{-na+2\ln(n)+o_{n\to+\infty}(n)} = e^{-na+o_{n\to+\infty}(n)} \to_{n\to+\infty} 0$.
On en déduit que $u_n = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exercice 5 *(Mines 2012) Nature de la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+2\times(-1)^n}}$

Solution de l'exercice: Remarque: On doit prendre $n\neq 1$.
La série n'étant pas à termes positifs, on ne peut pas raisonner par équivalent. Le CSSA ne s'applique pas (calculer les premier termes).

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + O_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum O_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ convergent (la première d'après CSSA) donc la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 6 *(Ccinp) Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de réels positifs. On pose* $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\times\cdots\times(1+a_n)}$*.*

1. *Calculer* u_1+u_2*. Donner une forme simplifiée de* $\sum_{i=1}^{n} u_i$*.*
2. *Montrer que la série* $\sum u_n$*. converge*
3. *Calculer sa somme pour* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$*.*

Solution de l'exercice: 1: On a $u_1+u_2 = \dfrac{a_1}{(1+a_1)} + \dfrac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = \dfrac{a_1(1+a_2)+a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} = \dfrac{(a_1(1+a_2)+a_2+1}{(1+a_1)(1+a_2)}$
donc $u_1+u_2 = \dfrac{(1+a_1)(1+a_2)-1}{(1+a_1)(1+a_2)}$.
Posons $p_n = (1+a_1)(1+a_2)\times\cdots\times(1+a_n)$. Montrons par récurrence sur n que (HR_n) : $\sum_{i=1}^{n} u_i = \dfrac{p_n-1}{p_n}$.
C'est vrai pour $n=1$ et $n=2$. Supposons (HR_n).
On a $\sum_{i=1}^{n+1} u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i + \dfrac{a_{n+1}}{p_{n+1}} = \dfrac{p_n-1}{p_n} + \dfrac{a_{n+1}}{p_{n+1}} = \dfrac{(p_n-1)(1+a_{n+1})+a_{n+1}}{p_{n+1}} = \dfrac{(p_n-1)(1+a_{n+1})+(1+a_{n+1})-1}{p_{n+1}} = \dfrac{p_n(1+a_{n+1})-1}{p_{n+1}} = \dfrac{p_{n+1}-1}{p_{n+1}}$, ce qui achève la démonstration.
2: La suite (p_n) est croissante car $p_{n+1} = (1+a_{n+1})p_n$ avec $a_{n+1}\geq 1$. On en déduit que (p_n) admet une limite.
Si $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{p_n-1}{p_n} = 1$ donc la série $\sum u_n$ converge et a pour somme 1.
Si $\lim_{n\to+\infty} p_n = l$, alors $l\geq p_1>0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{p_n-1}{p_n} = \dfrac{l-1}{l}$ donc la série $\sum u_n$ converge et a pour somme $\dfrac{l-1}{l}$.

3: Dans le cas où $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a $p_n = (1+a_i)(1+a_2)\times\cdots\times(1+a_n)$ donc $\ln(p_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+a_i) = \sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{i}}\right)$. Posons $v_i = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{i}}\right)$. On a $v_i \sim_{i\to\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ et la SATP $\sum\frac{1}{\sqrt{i}}$ diverge donc SATP $\sum v_i$ diverge. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(p_n) = +\infty$.et $p_n = e^{\ln(p_n)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$ donc la série $\sum u_n$ converge et a pour somme 1.

Exercice 7 *(Ccinp): Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x\rfloor}dx$. ($\lfloor x\rfloor$ est la partie entière de x).*

Solution de l'exercice: définition: $0 \le xe^{-E(x)} \le xe^{-(x-1)} = exe^{-x}$ et $\dfrac{xe^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = x^3e^{-x} \to_{x\to+\infty} 0$ donc l'intégrale existe. calcul: $\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x\rfloor}dx = \lim_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} xe^{-\lfloor x\rfloor}dx$ donc $\int_0^n xe^{-\lfloor x\rfloor}dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} xe^{-\lfloor x\rfloor}dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} xe^{-k}dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-k}}{2}\left((k+1)^2-k^2\right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-k}}{2} + ke^{-k}$.
$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-k}}{2} = \frac{1}{2(1-e^{-1})}$. Pour calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} ke^{-k}$, posons $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k$ pour $x \in]-1,1[$. On peut dériver terme à terme cette série entière: $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$ donc $xf'(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kx^k$. Or $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ donc $xf'(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kx^k$. On en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} ke^{-k} = \dfrac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$ et donc $\int_0^{+\infty} xe^{-\lfloor x\rfloor}dx = \dfrac{1}{2(1-e^{-1})} + \dfrac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2} = \dfrac{(1-e^{-1})+2e^{-1}}{2(1-e^{-1})^2} = \dfrac{1+e^{-1}}{2(1-e^{-1})^2} = \dfrac{e(1+e)}{2(e-1)^2}$..

Exercice 8 *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx$.*

1. *Montrer que u_n est bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$.*
2. *Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *Montrer que la série numérique $\sum u_n$ diverge.*
4. *Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}u_n$.*
5. *Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.*

Solution de l'exercice: 1: Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;1$ et $f_n(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, f_n est intégrable sur $]0;1$ donc u_n existe.
2. Utilisons le théorème de convergence dominée :
(H_1) Comme $\forall x \in]0;1[, \lim_{n\to+\infty}(1-x)^n = 0$, la suite $(f_n)_{n\geqslant0}$ converge simplement vers la fonction nulle g : x $\mapsto$ 0 sur $]0;1[$.
(H_2) Les fonctions $\mathrm{f_n}$ et la fonction g sont continues sur $]0;1[$.
(H_3) $\forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}, \forall x \in 0;1\left[, |\mathrm{f_n}(\mathrm{x})| = \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = \varphi(\mathrm{x})\right.$ et φ est continue et intégrable sur $]0;1[$ d'après Riemann.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 g(x)dx = 0$.
3: Si $x\in]0,1[$ alors $0<\sqrt{x}\le1$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \ge 1$ donc

pour $n\in\mathbb{N}^*$, comme f_n est positive sur $]0;1]$, on a $u_n \geqslant \int_0^1(1-x)^n dx = \left[\dfrac{-(1-x)^n}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1} \ge 0$. . Comme $\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n+1}$ diverge, par comparaison, $\sum_{n\geqslant1} u_n$ diverge.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, dans $u_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}} dx$, on pose $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$ de sorte que $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ avec u et v de classe C^1 sur $]0;1]$ et $\lim_{x0^+} u(x)v(x) = 0$. Ainsi, par intégration par parties, il vient $u_{n+1} = [2(1-x)^{n+1}\sqrt{x}]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 (1-x)^n \sqrt{x} dx$ donc $u_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 (1-x)^n \frac{1-(1-x)}{\sqrt{x}} dx$. Par linéarité de l'intégrale, comme les deux intégrales convergent, $u_{n+1} = 2(n+1)\left[\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx - \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{x}} dx\right] = (2n+2)u_n - (2n+2)u_{n+1}$ donc $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n}{2n+1} u_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} u_0$ d'après la question 4 qui se simplifie en $u_n = \frac{((2n)(2n-2)\cdots 2)^2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} u_0 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)} u_0$. Or $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $u_n = \frac{2}{2n+1} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$. D'après la formule de STIRLING ($n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$, on a donc $u_n \sim \frac{2}{2n} \times \frac{2^{2n}(2\pi n) n^{2n} e^{2n}}{e^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}}$ soit $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ comme attendu.
(On retrouve bien la divergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$).

Exercice 9 *X PSI 2022*

Justifier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2n^2+5n+3}{2^n}$ et calculer sa somme.

Solution de l'exercice:

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{2n^2+5n+3}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^{n-1}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison à une série de RIEMANn, comme $2 > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Pour calculer la somme de cette série numérique, posons $a_n = 2n^2 + 5n + 3$ et considérons la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Toujours par croissances comparées, $(a_n x^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ donc, par définition, le rayon de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x \in]-1;1[$, comme $a_n = 2(n+1)(n+2) - (n+1)$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ (les deux séries convergent puisque les deux rayons valent encore 1). On reconnaa®t les dérivées de la série géométrique, $\forall x \in]-1;1\left[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right.$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ de sorte que $f(x) = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{3+x}{(1-x)^3}$. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+5n+3}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3+(1/2)}{(1-(1/2))^3} = 28$.

Exercice 10 *(ENS Cachan PSI 2022)*

Soit p et q deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation $(E) : y'' + py' + qy = 0$.

1. *Soit f une solution de (E) non identiquement nulle avec $a \in \mathbb{R}$ telle que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta; a+\eta]\backslash\{a\}, f(x) \neq 0$.*
2. *Soit f et g deux solutions de (E) telles que (f,g) est libre. On définit $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.*
   - *(a) Montrer que pour tout réel t, on a $W(t) \neq 0$.*
   - *(b) Etablir une équation différentielle vérifiée par W.*
   - *(c) En déduire une expression de W en fonction de $t_0 \in \mathbb{R}$.*
   - *(d) Soit $\mathrm{a} < \mathrm{b}$ tels que $\mathrm{f(a)} = \mathrm{f(b)} = 0$ et $\forall x \in]\mathrm{a};\mathrm{b}[, \mathrm{f(x)} \neq 0$. Montrer que g s'annule une seule fois sur $]\mathrm{a};\mathrm{b}[$.*

Solution de l'exercice:

1. Spposons NON (il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta; a+\eta]\backslash\{a\}, f(x) \neq 0$)
c'est-à-dire $\forall \eta > 0, \exists x \in [a-\eta; a+\eta]\backslash\{a\}, f(x) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. pour $\eta = \dfrac{1}{n}$ on obtient: $\exists x_n \in [a - \dfrac{1}{n}; a + \dfrac{1}{n}]\backslash\{a\}, f(x_n) = 0$.

On a donc $\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ donc par composition des limlites $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = f'(a)$.

On en déduit que $\begin{cases} f(a)=0 \\ f'(a)=0 \end{cases}$

Or la fonction nulle est ausi solution de (E) avec les mêmes conditions de Cauchy.

Les fonctions p et q étant continues, le théorème de Cauchy s'applique donc f est la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

On en déduit que il existe un réel $\eta>0$ tel que $\forall x \in [a-\eta; a+\eta]\backslash\{a\}, f(x)\neq 0$.

2b: Supposons qu'il existe un réel t_1 tel que $W(t_1) = \begin{vmatrix} f(t_1) & g(t_1) \\ f'(t_1) & g'(t_1) \end{vmatrix} = 0$. Alors les colonnes de cette matrice sont liées ce qui montre l'existence de $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ tel que $\lambda \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f'(t_1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g'(t_1) \end{pmatrix} = 0$. Posons $h=\lambda f+\mu g$, comme l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel puisque (E) est linéaire et homogène, la fonction h est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(t_1)=h'(t_1)=0$. L'unicité de la solution à un problème de CAUCHY montre que $h=0$. Ainsi, comme $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ et $\lambda f+\mu g=0$, la famille (f,g) est liée contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. Par l'absurde, on en déduit que W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2c On a $W(t)=f(t)g'(t)-f'(t)g(t)$. et f et g sont deux fois dérivables donc W est dérivable et
$W(t)=f(t)'g'(t)+f(t)g''(t)-f'(t)g'(t)-f''(t)g(t) = f(t)\left(-pg'(t)-qg(t)\right)-\left(-pf'(t)-qf(t)\right)g(t) = p(t)W(t)$.
Pour $t_0\in\mathbb{R}$, notons $P : t\mapsto \int_{t_0}^t p(u)du$ la primitive de p qui s'annule en t_0, on sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F) sont les fonctions $y : t\mapsto \lambda e^{-P(t)}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. En évaluant en t_0, on a bien sà»r $\lambda = W(t_0)$ car $\mathrm{P}(\mathrm{t}_0)=0$ donc $\forall \mathrm{t}\in\mathbb{R}, \mathrm{W}(\mathrm{t}) = \mathrm{W}(\mathrm{t}_0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{P}(\mathrm{t})}$.

c.

d. Comme f est continue sur $]\mathrm{a};\mathrm{b}[$ et qu'elle ne s'y annule pas, elle y garde un signe constant, supposons par exemple que f est strictement positive sur $]a;b[$. Ainsi, $f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$ car $f(x)-f(a)=f(x)>0$ et $x-a>0$ si $x\in]a;b[$. De même, $f'(b)\leqslant 0$. Si on avait $f'(a)=0$, comme en a., f serait la fonction nulle ce qui n'est pas le cas. Plus précisément, on a donc $\mathrm{f}'(\mathrm{a})>0$ et $\mathrm{f}'(\mathrm{b})<0$.

Comme W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par continuité, W garde aussi un signe constant. Ainsi, $W(a)=-f'(a)g(a)$ et $W(b)=-f'(b)g(b)$ sont de même signe, ce qui impose à $g(a)$ et $g(b)$ d'être de signes différents. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue, il existe $\mathrm{c}\in]\mathrm{a};\mathrm{b}[$ tel que $\mathrm{g}(\mathrm{c})=0$.

Supposons que g s'annule au moins deux fois sur $]\mathrm{a};\mathrm{b}[$, en c et en e et supposons par exemple que $\mathrm{e}>\mathrm{c}$. Posons $d=\mathrm{Inf}(A)$ avec $A=\{x\in]c;e] \mid g(x)=0\}$; d existe car A est non vide puisque $e\in A$ et A est minorée par c. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = d$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}, g(a_n)=0$, par continuité de g, on a donc $g(d)=0$ par passage à la limite. Ainsi, $d=\mathrm{Inf}(A)=\mathrm{Min}(A)$. Par construction, $g(c)=g(d)=0$ et g ne peut pas s'annuler sur $]\ ;\mathrm{d}[$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a prouvé précédemment que f s'annulait alors sur $]\mathrm{c};\mathrm{d}[$, ce qui contredit l'hypothèse faite initialement sur f.

Par l'absurde, on a donc montré que g s'annulait une fois et une seule sur $]\mathrm{a};\mathrm{b}[$.

Exercice 11 *(ccinp) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$.*

1. *Déterminer la limite de la suite (I_n).*
2. *Soit $L = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u} du$. Justifier l'existence de L et justifier que $I_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{L}{n}$.*
3. *Justifer que $L = \dfrac{\pi^2}{12}$ (on admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$).*

Solution de l'exercice: 1: Appliquons le théorème de convergence dominée sur $[0,1[$ à $f_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$.
- On a, pour $t \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- Les fonctions f_n est sont continues donc CPM sur $[0,1[$.
- $|f_n(t)| \leq \ln(2) = \varphi(t)$. La fonction φ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1[$.
D'après le théorème de convergence dominée, (I_n) converge vers $\int_0^1 0dt = 0$.
2: On a $\ln(1+u) \sim_{u\to0} u$ donc $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0,1]$ donc l'intégrale L converge.
Si $n \geq 1$, par le changement de variable C^1 et bijectif strictement croissant de $]0,1]$ dans $]0,1]$ défini par $u(x) = x^n$, on a $nI_n = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+t^n)}{t^{n-1}} nt^{n-1}dt = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du$. Posons $g_n(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u} u^{\frac{1}{n}}$. On a $u \in]0,1]$ donc $u^{\frac{1}{n}} \leq u|$ et $g_n(u)| \leq \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0,1]$. Le téhorème de convergence dominée donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u} du = L$ donc $I_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{L}{n}$.
3: Pour $u \in]0,1[$, $\ln(1+u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$ donc $\dfrac{\ln(1+u)}{u} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} u^{n-1}$. Posons $v_n(u) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} u^{n-1}$.
- La fonction v_n est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1[$.
- La série de fonction $\sum v_n$ converge simplement vers $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ sur $]0,1[$
- $\int_0^1 |v_n(u)|\,du = \dfrac{1}{n^2}$ donc, comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, le th d'interversion $\sum - \int$ donne
$\int_0^1 \dfrac{\ln(1+u)}{u} du = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 v_n(u)\,du = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = L$.
On a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} - L = 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2p)^2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ donc $L = \dfrac{\pi^2}{12}$.
Pradere

Exercice 12 *(ccp 2015)*

1. *Calculer* $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
2. *Donner le développement en série entière de la fonction arctangente.*
   En déduire que $\pi = 8\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$.
3. *Déterminer avec la calculatrice une valeur de n à partir de laquelle $8\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1}$ est une approximation de π à 10^{-10} près.*

Solution de l'exercice : 1:Posons $a=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On a $1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\dfrac{2a}{1-a^2}$ donc $a^2+2a-1=0$ donc $a=-1\pm\sqrt{2}$. Or $a>0$ car $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)>\tan(0)=0$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

2: Si $|x|<1$, alors $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)\,x^{2n}$ donc par intégration du dse,

$\forall x\in\left]-1,1\right[,\ \arctan(x)-\arctan(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

On a $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$ et $\frac{\pi}{8}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\frac{\pi}{8}=\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)$ oret $0<\sqrt{2}-1<2-1=1$

donc $\frac{\pi}{8}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$.

3: La série $\sum\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$ est spéciale alternée: si $a_n=\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{2n+1}$ $u_n=(-1)^n a_n$ est alternée et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2n+1}{2n+3}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3}<1$ donc la suite $(|u_n|)$ est décroissante et de limite nulle donc

$$\left|\pi-8\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right|\le\left|8\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3}\right|=8\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3}}{2n+3}=u_{n+1}.$$

La calculatrice donne $u_{11}\approx 5.464\,1\times10^{-10}$ donc si $n\ge10$ alors $\left|\pi-8\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right|\le10^{-10}$.

Exercice 13 *(Ccp 2018): Soit* $F:\lambda\mapsto\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}dx$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* F.
2. *Soit* $a>0$. *Montrer que* F *est de classe* C^1 *sur* $[a\,,+\infty[$. *Calculer* $F(\lambda)$.
3. *En déduire, pour* $a,b>0$, *la valeur de* $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$.

Solution de l'exercice: 1: Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto\dfrac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- On a $\dfrac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}=\dfrac{1-x+o_{x\to0}(x)-(1-\lambda x+o_{x\to0}(x))}{x}=\dfrac{(-1+\lambda)\,x+o_{x\to0}(x)}{x}\sim_{x\to0}-1+\lambda$ donc $x\mapsto\dfrac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.
- Si $\lambda=0$, $\dfrac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}\sim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}$ donc n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Si $\lambda<0$, $\dfrac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}\sim_{x\to+\infty}\dfrac{-e^{-\lambda x}}{x}\to_{x\to+\infty}+\infty$ donc n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Si $\lambda>0$, alors $x\mapsto\dfrac{e^{-x}}{x}$ et $x\mapsto\dfrac{-e^{-\lambda x}}{x}$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$ car $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ On en déduit que F est définie sur $]0,+\infty[$.

2: On suppose que $0<a$ et $\lambda\ge a$. Posons $f(\lambda,x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à λ égale à $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)=e^{-\lambda x}$. On a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,x)\right|\le e^{-ax}=\varphi(x)$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ (la vérification des autres hypothèses sont laissées au lecteur) donc F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et $F'(x)=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=\dfrac{1}{\lambda}$.

3: Ce résultat étant vrai pour $a>0$ quelconque, il s'étend à $]0,+\infty[$ On en déduit qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $\forall\lambda>0,\ F(\lambda)=\ln(\lambda)+C$. Comme $F(1)=0$, on a $C=0$ et $F(\lambda)=\ln(\lambda)$. Q3: Le changement de variable affine $u=ax$ donne $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-u}-e^{-\frac{b}{a}u}}{u}du=F\left(\dfrac{b}{a}\right)=\ln(b)-\ln(a)$.
villeneuve
Mace

Exercice 14 *Mines On pose, pour θ réel et $n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$.*

1. *Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.*
2. *Pour $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $|z|<1$, justifier que la série $\sum nz^n$ converge et préciser sa somme.*
3. *En déduire la somme de la série $\sum u_n$.*

Solution de l'exercice: Posons $u_n=n^2\dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$. On a $|n^2u_n|\leq\dfrac{n^3}{2^n}\to_{n\to+\infty}0$ donc $u_n=o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge absolument.
On a $\dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}=\dfrac{n\frac{1-\cos(2n\theta)}{1}}{2^n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{2^n}-\dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n}\right)=\frac{1}{2}(v_n+w_n)$.avec $v_n=\dfrac{n}{2^n}$ et $w_n=\dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n}$.
On pose $z_0=\dfrac{e^{i2\theta}}{2}$, on a $\dfrac{\cos(2n\theta)}{2^n}=\operatorname{Re}(z_0^n)$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\operatorname{Re}(z_0^n)=\operatorname{Re}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(z_0)^n\right)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Posons, pour $|x|<1$, $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$. On a $g'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n=\dfrac{x}{(1-x)^2}$. Ce calcul ne vaut que pour x réel.
Pour calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$ il faut étendre cette relation à $z\in\mathbb{C}$. En utilisant le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^n$ par elle même pour $|z|<1$, on obtient de même, $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ avec $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}1\times1=n+1$, donc $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$ donc $\dfrac{z}{(1-z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nz^n$.
On pose $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nz^n$. On a donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{2^n}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)^n=f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n}=\operatorname{Re}\left(f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right)$ d'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}=\dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\operatorname{Re}\left(f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right)\right)$. Or $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$ et

$$f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right)=\frac{\frac{e^{i2\theta}}{2}}{\left(1-\frac{e^{i2\theta}}{2}\right)^2}=\frac{2e^{i2\theta}}{4-4e^{i2\theta}+e^{i4\theta}}=\frac{2e^{i2\theta}\left(4-4e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}\right)}{\left(4-4e^{i2\theta}+e^{i4\theta}\right)\left(4-4e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}\right)}\text{ donc}$$

$$f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right)=\frac{8e^{i2\theta}-8-2e^{-i2\theta}}{33-20\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)+4\left(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}\right)}=\frac{8e^{i2\theta}-8-2e^{-i2\theta}}{33-40\cos(2\theta)+8\cos(4\theta)}\text{ et}$$

$$\operatorname{Re}\left(f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right)=\frac{-8+6\cos(2\theta)}{33-40\cos(2\theta)+8\cos(4\theta)}\text{ d'où }\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=1+\frac{4-3\cos(2\theta)}{33-40\cos(2\theta)+8\cos(4\theta)}.$$

Cursente

Exercice 15 *(Mines ponts)*

1. *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=0$ si $|x|>\frac{1}{n}$ et $f_n(x)=n-n^2|x|$ si $|x|\leq\frac{1}{n}$.*

2. *Etudier la limite de la suite de terme général $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g(x)\, dx$ ou g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution de l'exercice: 1: La fonction f_n est paire. Elle est affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ avec $f_n(0) = n$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.
- La suite $(f_n(0))$ ne converge pas
- Si $x \neq 0$, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < |x|$ et pour $n \geq n_0$, on a $f_n(x) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}^*$ vers la fonction nulle notée f..
Pour n fixé et $x \neq 0$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|$ donc $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = f_n(0) = n \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|$ donc la suite $\left(\sup_{t\in\mathbb{R}^*} |f_n(t) - f(t)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^*$
2: L'intégrale I_n est définie et $I_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) g(x)\, dx$. Montrons que la suite (I_n) converge vers $g(0)$. On remarque que $\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx = 1$ (aire du triangle). Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de g entraîne qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - 0| \leq \alpha$, alors $|g(x) - g(0)| \leq \varepsilon$. Si $\frac{1}{n} \leq \alpha$ (soit $n \geq \frac{1}{\alpha}$), on aura, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $|g(x) - g(0)| \leq \varepsilon$ donc $|I_n - g(0)| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) g(x)\, dx - g(0)\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) g(x)\, dx - g(0)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx\right| = \left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x) (g(x) - g(0))\, dx\right|$
donc $|I_n - g(0)| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)(g(x) - g(0))|\, dx \leq \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)|\, dx = \varepsilon \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f_n(x)\, dx = \varepsilon$. Comme ε est quelconque, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} (I_n) = g(0)$.
Remarque: Au lieu de considérer des valeurs absolues, il est peut-être plus simple d'intégrer la double inégalité $f_n(x) \times (g(0) - \varepsilon) \leq f_n(x) \times g(x) \leq f_n(x) \times (g(0) + \varepsilon)$

Exercice 16 *(Mines ponts): Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On définit la suite de fonctions (f_n) de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$.*

1. *Etudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.*
2. *Déterminer la somme de cette série de fonctions à l'aide d'une équation différentielle..*

Solution de l'exercice: Amodifier

1. Soit $a > 0$.. Etudions la convergence normale sur $[0, a]$
   La fonction f est continue sur le segment $[0, a]$ donc bornée. Posons $M = \sup_{[0,a]} |f|$.
   Soit $x \in [0, a]$. On a $f_1(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ donc $|f_1(x)| \leq M|x - a|$. Montrons par récurrence que $\forall x \in [a, b], |f_n(x)| \leq \dfrac{Mx^n}{n!}$.
   C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
   On a $|f_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x f_n(t)\, dt\right| \leq \int_0^x |f_n(t)|\, dt \leq \int_0^x \dfrac{Mt^n}{n!} dt = \dfrac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$.
   Soit $x \in [0, a]$. La série $\sum \dfrac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$ converge donc la série $\sum f_n(x)$ converge (absolument). La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement.
   On a donc $\|f_n\|_\infty^{[0,a]} = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| \leq \dfrac{Ma^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{a^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

2. Posons $g = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. On veut utiliser le fait que $f'_{n+1} = f_n$ et le théorème de dérivation terme à terme.
   On pose donc $u = g - f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ (car $f_0 = f$ n'est supposée que continue). Soit $a > 0$.
   - La série $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge simplement vers u (d'après Q1)
   - chaque $f_n, (n \geq 1)$ est de classe C^1 et $f'_n = f_{n-1}$

- la série $\sum_{n\geq 1} f_n' = \sum f_{n_{n-1}}$ converge normalement donc uniformément sur $[0,a]$ vers g.

La fonction u est donc de classe C^1 sur $[0,a]$ et $u' = g = u + f$.

Les solutions de $y' = y$ sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x$.

La méthode de variation de la constante appliquée à l'équation $y' - y = f$ conduit à poser $y_p(x) = \lambda(x) e^x$ et en reportant dans l'équation, on aboutit à $\lambda'(x) = e^{-x} f(x)$ donc $y_p(x) = e^x \int_0^x f(t) e^{-t} dt$ est solution particulière. On a donc $u(x) = e^x \times \left(\lambda + \int_0^x f(t) e^{-t} dt\right)$. Or $u(a) = 0$ car $f_n(a) = 0$ pour $n \geq 1$ donc $\lambda = 0$ et $u(x) = e^x \times \int_0^x f(t) e^{-t} dt$ donc $g(x) = f(x) + e^x \times \int_0^x f(t) e^{-t} dt$.

Lundi

Exercice 17 *(Ccinp):*

1. *Justifier la convergence et calculer* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}{n}$*.pour* $x \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$.
2. *Peut on étendre le résultat?*

Solution de l'exercice: 1: La série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 et $\forall x \in]-1,1[, \ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.

Cette série converge pour $x = -1$: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est spéciale alternée et el diverge pour $x = 1$. La série $\sum \frac{(1-x)^n}{n}$ converge donc si et seulement si $1 - x \in [-1, 1[$ et la série $\sum \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}{n}$ converge donc si et seulement si $1 - \frac{1}{x} \in [-1,1[$. Or $\begin{cases} -1 \leq 1 - x < 1 \\ -1 \leq 1 - \frac{1}{x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ 0 < \frac{1}{x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$. On a, si $\frac{1}{2} < x < 2$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^n}{n} = -\ln(1-(1-x)) - \ln\left(1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = -\ln(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

2: On peut étendre la relation $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ à $x = -\cancel{1}$:

Posons $g(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

Montrons que $g(1) = \ln(2)$. Pour cela, montrons que g est continue sur $[0,1]$.

Appliquons le th de continuité de la somme de la série de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0,1]$ avec $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

- Les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$.
- CV simple (déja connu sur $[0,1[$): CSSA (qui servira pour la CV uniforme):

pour x fixé,

- $(-1)^n u_n(x) = -\frac{x^n}{n} \leq 0$ donc de signe constant.
- $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$
- $|u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{x^n}{n} \leq |u_n(x)|$ car $x \in [0,1]$.

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

- CV uniforme:

Remarque: $u_n(1) = \frac{1}{n}$donc $\|u_n\|_\infty \geq \frac{1}{n}$ donc il n'y a pas convergence normale.

D'après CSSA, $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ donc $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 0$.
On en déduit que g est continue sur $[0,1]$..
Or $g(x) = \ln(1+x)$ si $x<1$ donc $\lim\limits_{x\to1} \ln(1+x) = \lim\limits_{x\to1} g(x) = g(1)$ donc $\ln(2) = g(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1^n}{n}$, ce qui permet d'étendre le résultat à $x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.

Exercice 18 *(Ccp 2018): Soit* $F : \lambda \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de F.*
2. *Soit $a>0$. Montrer que F est de classe C^1 sur $[a\,,+\infty[$. Calculer $F(\lambda)$.*
3. *En déduire, pour $a, b > 0$, la valeur de $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.*

Solution de l'exercice: 1: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- On a $\dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} = \dfrac{1 - x + o_{x\to0}(x) - (1 - \lambda x + o_{x\to0}(x))}{x} = \dfrac{(-1+\lambda)x + o_{x\to0}(x)}{x} \sim_{x\to0} -1+\lambda$
donc $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.
- Si $\lambda = 0$, $\dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Si $\lambda < 0$, $\dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} \sim_{x\to+\infty} \dfrac{-e^{-\lambda x}}{x} \to_{x\to+\infty} +\infty$ donc n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Si $\lambda > 0$, alors $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{-e^{-\lambda x}}{x}$ sont intégrables sur $[1,+\infty[$ car $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ On en déduit que F est définie sur $]0,+\infty[$.
2: On suppose que $0<a$ et $\lambda \geq a$. Posons $f(\lambda, x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à λ égale à $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = e^{-\lambda x}$. On a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\right| \leq e^{-ax} = \varphi(x)$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ (la vérification des autres hypothèses sont laissées au lecteur) donc F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \dfrac{1}{\lambda}$.
3: Ce résultat étant vrai pour $a>0$ quelconque, il s'étend à $]0,+\infty[$ On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0,\ F(\lambda) = \ln(\lambda) + C$. Comme $F(1) = 0$, on a $C = 0$ et $F(\lambda) = \ln(\lambda)$. Q3: Le changement de variable affine $u = ax$ donne $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u} du = F\left(\dfrac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a)$.

Exercice 19 *(Ccinp) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

Solution de l'exercice :$S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1+2k/n}} = \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ avec $a=0$, $b=1$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$. D'après le cours sur les sommes de Riemann, $S_n \to_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+t}} dt = 2\sqrt{2} - 2$

Exercice 20 *(mines) Déterminer la limite de la suite de terme général* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$. *Déterminer la limite de* $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{1}{n+k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution de l'exercice: 1: On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} = S_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = \frac{1}{x}$. La fonction f est continue donc (théorème sur les sommes de Riemann où méthode des rectangles) (S_n) converge vers $\int_1^2 \dfrac{1}{x} dx = \ln(2)$.

La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ donc (Taylor-Lagrange) $|\sin(x) - x| = \left| f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f'}{}\right.\right.$

$\dfrac{M_3 |x-0|^3}{3!}$ avec $M_3 = \sup_{\mathbb{R}} |f'''|$.

On a $|S'_n - S_n| = \left| \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{1}{n+k}\right) - \dfrac{1}{(n+k)} \right| \leq \dfrac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(n+k)^3}$ et $\dfrac{1}{(n+k)^3} \leq \dfrac{1}{n^3}$ donc $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(n+k)^3} \leq n \times \dfrac{1}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$ donc (S'_n) converge aussi vers $\ln(2)$.

Exercice 21 *(Mines ponts)*

1. *.Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet un unique point fixe c dans $\mathbb{R}$ et donner la partie entière de c.*
2. *Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. (On s'intéressera à la valeur de $f(c)$).*
3. *Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.*

Solution de l'exercice:

1: Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geqslant 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $\mathrm{a} < \mathrm{b}$ tels que $\mathrm{h(a) = h(b)}$ et on aurait $\forall x \in [\mathrm{a;b}], \mathrm{h'(x)} = 0$, ce qui est impossible car $\mathrm{f'}$ ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0;1[$ tel que $h(c) = 0$ donc un unique point fixe c de cos sur $\mathbb{R}$.
(On trouve numériquement $\mathrm{c} \simeq 0,74$.
2: Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f, on obtient $\mathrm{f \circ f \circ f = f \circ \cos}$ donc $\cos \circ \mathrm{f} = \mathrm{f} \circ \cos$ ce qui, en c, devient $\mathrm{f(c) = \cos(f(c))}$. D'après l'unicité montrée à la question a., on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c, devient $\mathrm{f'(c)^2 = -\sin(c) < 0}$ car, comme $\mathrm{c} \in]0;1[\subset]0;\pi[$, on a $\sin(\mathrm{c}) > 0$. NON ! Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.
3: Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$. Comme en b., on a $f(c) = c$. Si f n'était pas injective sur $[0;1]$, alors il existerait deux réels x et y tels que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$ et $f(x) = f(y)$ et on aurait $f \circ f(x) = f \circ f(y) = \cos(x) = \cos(y)$ et la fonction cos ne serait pas injective sur $[0;1]$. NON !

Ainsi, f est injective sur $[0;1]$ donc, par continuité, elle y est strictement croissante ou strictement décroissante. Comme f est continue en c, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c-\alpha; c+\alpha], 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = \mathrm{Min}(c, 1-c) \sim 0,26 > 0$ dans $|f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$). On aurait donc, comme f est strictement monotone sur $[c-\alpha; c+\alpha]$ et que $f([c-\alpha; c+\alpha]) \subset [0;1]$, intervalle sur lequel f est aussi strictement monotone (la même monotonie) et, par composée, la fonction $f \circ f = \cos$ serait strictement croissante sur $[c-\alpha; c+\alpha]$. NON ! Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.