

lundi 2 juin 2025

Exercice 1 (Ccp 2018): Soit $F : \lambda \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} dx$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F .

2. Soit $a > 0$. Montrer que F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$. Calculer $F(\lambda)$.

3. En déduire, pour $a, b > 0$, la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Solution de l'exercice: ATTENTION: x est la variable d'intégration et λ est le paramètre.

1: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$.

- On a $\frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} = \frac{1 - x + o_{x \rightarrow 0}(x) - (1 - \lambda x + o_{x \rightarrow 0}(x))}{x} = \frac{(-1 + \lambda)x + o_{x \rightarrow 0}(x)}{x} \sim_{x \rightarrow 0} -1 + \lambda$

donc $x \mapsto \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.

- Si $\lambda = 0$, $\frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ donc n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

- Si $\lambda < 0$, $\frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-\lambda x}}{x} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

- Si $\lambda > 0$, alors $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$ et $x \mapsto \frac{-e^{-\lambda x}}{x}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$ car $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ On en déduit que F est définie sur $A =]0, +\infty[$.

2: On suppose que $0 < a$ et $\lambda \geq a$. Posons $f(\lambda, x) = \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à λ égale à $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = e^{-\lambda x}$. On a $\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) \right| \leq e^{-ax} = \varphi(x)$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ (la vérification

des autres hypothèses sont laissées au lecteur) donc F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\lambda = \frac{1}{x}$.

Ce résultat étant vrai pour $a > 0$ quelconque, il s'étend à $]0, +\infty[$ On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \lambda > 0$, $F(\lambda) = \ln(\lambda) + C$. Comme $F(1) = 0$, on a $C = 0$ et $F(\lambda) = \ln(\lambda)$.

Q3: Le changement de variable affine $u = ax$ donne $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u} du = F\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a)$.

Exercice 2 (Ccinp) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} (3n+1)^2 x^n$

Solution de l'exercice:

$\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence donc $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ a même rayon de convergence que $\sum x^n$.

Si $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ alors $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon de convergence et $(3n+1)^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} 9n^2$ donc le rayon de convergence est $R = 1$.

On a $(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 9n(n-1) + 15n + 1$ donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 9 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^n + 15 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 9 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^n + 15 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\text{soit } f(x) = 9x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + 15x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 9x^2 g''(x) + 15x g'(x) + g(x) \text{ avec } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(A finir).

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

1. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $\int_0^1 u^i \ln(u)^2 du$ converge et vaut $\frac{2}{(i+1)^3}$.
2. Montrer que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{n^2}$ est convergente.
3. Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(n+k)}$ et a pour somme $\frac{H_n}{n}$.
4. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) dx$ converge.
5. Montrer que $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) dx = -\frac{H_n}{n}$.
6. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)^2}{x} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Solution de l'exercice:

1: Effectuons sous réserve de convergence deux IPP

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^i \ln(u)^2 du &= \left[\frac{u^{i+1}}{i+1} \ln^2(u) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^i}{i+1} 2 \ln(u) du = - \int_0^1 \frac{u^i}{i+1} 2 \ln(u) du \\ &= -2 \left(\left[\frac{u^{i+1}}{(i+1)^2} 2 \ln(u) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^i}{(i+1)^2} du \right) = 2 \int_0^1 \frac{u^i}{(i+1)^2} du = \frac{2}{(i+1)^3}. \end{aligned}$$

Justification: Les limites des crochets existent et sont finies donc toutes les intégrales sont de même nature et la dernière est convergente donc la première aussi..

2: Par croissance de l'intégrale, $\frac{1}{i+1} \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{i}$ donc $\ln(i+1) - \ln(i) \leq \frac{1}{i}$ et donc $\ln(n+1) - \ln(1) = \sum_{i=1}^n \ln(i+1) - \ln(i) \leq H_n$ et si $i \geq 2$, $\frac{1}{i} \leq \ln(i) - \ln(i-1)$ donc $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \leq \ln(n)$ donc $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1)$

Donc $0 \leq \frac{H_n}{n^2} \leq \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{1}{n^2}$. Or $\frac{\ln(n)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\ln(n)}{n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$ donc par comparaison

avec une SATP convergente, $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge absolument donc $\sum \frac{H_n}{n^2}$ converge.

3: $\frac{1}{k(n+k)} \sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2}$ donc la série converge.

De plus, $\frac{1}{k(n+k)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(n+k)} \right)$ donc

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(n+k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(n+k)} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=N+1}^{n+N} \frac{1}{k} \right) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} \frac{H_n}{n}$$

car $0 \leq \sum_{k=N+1}^{n+N} \frac{1}{k} \leq \frac{n}{N} \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} 0$. On a donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)} = \frac{H_n}{n}$

4: $x \mapsto x^{n-1} \ln(1-x)$ est continue sur $[0, 1[$. Le changement de variable $u = 1-x$ donne, sous réserve de convergence, $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) dx = \int_0^1 (1-u)^{n-1} \ln(u) du$ et $(1-u)^{n-1} \ln(u) \sim_{u \rightarrow 0} \ln(u)$ et $u \mapsto \ln(u)$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc $\int_0^1 (1-u)^{n-1} \ln(u) du$ converge donc $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) dx$ converge.

5: Pour $x \in [0, 1[$, $x^{n-1} \ln(1-x) = -x^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{x^{n+k-1}}{k}$.

Posons $u_k(x) = -\frac{x^{n+k-1}}{k}$.

On a $\int_0^1 |u_k(x)| dx = \left[\frac{x^{n+k}}{k(n+k)} \right]_0^1 = \frac{1}{k(n+k)} \sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^2}$ donc la série $\sum \int_0^1 |u_k(x)| dx$ est convergente donc

(les deux autres hypothèses du th d'interversion série intégrale sur I quelconque sont à vérifier), on a

$\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) dx = - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 u_k(x) dx = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)} = -\frac{H_n}{n}$ d'après la question 3.

6: On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} \int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 v_n(x) dx$ avec $v_n(x) = \frac{-1}{n} x^{n-1} \ln(1-x)$.

On a pour $x \in]0, 1[$ $v_n(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} \times \frac{-x^n}{n}$ donc la série $\sum v_n(x)$ converge et a pour somme $\frac{\ln(1-x)^2}{x}$

Appliquons le théorème d'interversion série intégrale sur $]0, 1[$.

- v_n est intégrable sur $[0, 1[$ et $\int_0^1 |v_n(x)| dx = \int_0^1 v_n(x) dx = \frac{H_n}{n^2}$

- la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ et a pour somme $x \mapsto \frac{\ln(1-x)^2}{x}$ qui est continue par morceaux car continue.

- La série $\sum \int_0^1 |v_n(x)| dx$ converge (d'après la deuxième question).

On en déduit que $x \mapsto \frac{\ln(1-x)^2}{x}$ est intégrable sur $]0, 1[$ et $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)^2}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2}$.

Or $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)^2}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(u)^2}{1-u} du = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \ln(u)^2 \right) du$.

et $\int_0^1 |u^n \ln(u)^2| du = \frac{2}{(n+1)^3}$ (première question) donc la série $\sum \int_0^1 |u^n \ln(u)^2| du$ converge

donc d'après le théorème d'interversion série intégrale,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln(u)^2}{1-u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 u^n \ln(u)^2 du \right) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 4 On pose, pour x réel, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
3. Trouver un équivalent de $f'(x)$ quand x tend vers 0^+ . La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .
5. Tracer la courbe représentative de f .

Solution de l'exercice:

1: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\text{Arctan}(nx)}{n^2}$. Alors $|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$ donc, par comparaison et critère de RIEMANN, la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge pour tout réel x . Ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$: f est définie sur $\mathbb{R}$. La majoration précédente montre même que f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{\pi}{2n^2}$ (on a même égalité car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2n^2}$) et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\pi}{2n^2}$ converge donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, par théorème, la fonction somme f est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

2: Utilisons le théorème de dérivation des séries de fonctions :

(H₁) On vient de voir que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$ (et même sur $\mathbb{R}$).

(H₂) Pour tout entier $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f'_n(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

(H₃) Soit $a > 0$, posons $J_a = [a; +\infty[$, on a $\forall x \in J_a, \forall n \geq 1, |f'_n(x)| \leq f'_n(a)$ donc $\|f'_n\|_{\infty, J_a} = f'_n(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 a^2}$ donc,

par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty, J_a}$ converge ce qui justifie que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur J_a et $a > 0$ est quelconque.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \neq 0, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

On fait de même sur $] -\infty, a]$

3: On effectue une comparaison série-intégrale. Si $x > 0$ est fixé, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $n \geq 2$, on a $\int_n^{n+1} g_x(t)dt \leq g_x(n) = f'_n(x) \leq \int_{n-1}^n g_x(t)dt$. On somme pour n allant de 1 à p pour l'inégalité de gauche et pour n allant de 2 à p pour celle de droite et on obtient par CHASLES $\int_1^{p+1} g_x(t)dt \leq \sum_{n=1}^p f'_n(x) \leq f'_1(x) + \int_1^p g_x(t)dt$.

$$\text{Or, } \frac{1}{t(1+t^2x^2)} \frac{(1+t^2x^2)-t^2x^2}{t(1+t^2x^2)} = \frac{1}{t} - \frac{tx^2}{1+t^2x^2}$$

Pour $y \geq 1$, on a $\int_1^y g_x(t)dt = \int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2t}{2(1+x^2t^2)} \right) dt = [\ln(t) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2t^2)]_1^y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x^2y^2}{y^2}\right)$ donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y g_x(t)dt = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \ln(x)$. Ainsi, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'encadrement ci-dessus, on parvient à $\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \ln(x) \leq f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \ln(x)$. Par encadrement, on en déduit l'équivalent $f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.

D'autre part f est continue en 0 donc (th limite de la dérivée), le graphe de f admet donc en 0^+ une tangente verticale et f n'est pas dérivable en 0.

4 L'idée de cette question est de montrer, en s'inspirant de la question précédente que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_0^x (-\ln(t))dt$.

Pour $x > 0$, comme $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ pour $a > 0$ par le théorème fondamental de l'intégration, en faisant tendre a vers 0, par continuité de f en 0, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Comme $f'(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$, on a $f'(t) + \ln(t) \underset{0}{=} o(\ln(t))$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0; \alpha[, |f'(t) + \ln(t)| \leq \varepsilon |\ln(t)|$. Ainsi, $|\int_0^x (f'(t) + \ln(t))dt| \leq \varepsilon \int_0^x (-\ln(t))dt$. Il vient donc $|f(x) + x \ln(x) - x| \leq \varepsilon |x \ln(x) - x|$, ce qui garantit que $f(x) + x \ln(x) - x = o(x \ln(x) - x)$, ou encore que $f(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x) + x$. Mais comme $-x \ln(x) + x \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$, on a enfin l'équivalent $f(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$.

5: a: Comme toutes les f_n sont croissantes comme la fonction Arctan, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi utiliser la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et l'expression de sa dérivée positive vue précédemment.

b. en $+\infty$: Appliquons le th de la double limite:

$\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Or les fonctions f_n admettent des limites finies en $\pm\infty$. Par le théorème de la double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi^2}{6}$. Comme f est impaire car toutes les fonctions f_n le sont, on a aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$.

Conclusion: La fonction f est impaire, croissante et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi^3}{12} \sim 2,58$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi^3}{12}$. Son graphe ressemble donc à celui de la fonction Arctan, avec deux asymptotes horizontales d'équation $y = \pm \frac{\pi^3}{12}$, mais avec une tangente verticale en 0.

Exercice 5 Ccinp: Montrer que la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = \frac{ch(x) - 1}{x^2}$ admet un prolongement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice: Pour $x \neq 0$, $\frac{ch(x) - 1}{x^2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1}{x^2} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{x^2}$
donc $\frac{sh(x) - x}{x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+3)!}$. La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+3)!}$ est une somme de série entière de rayon de convergence $+\infty$ donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et prolonge $x \mapsto \frac{sh(x) - x}{x^3}$.

Exercice 6 (Ccinp psi) Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

1. Montrer que F est bien définie sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$

3. Déterminer $F(x)$ sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution de l'exercice: 1: On pose $f(x, t) = \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}$ et $I =]0, +\infty[$

Si $x > 0$, alors $\frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2}$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et $\frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} = \frac{1 - (1 - xt^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2))}{t^2}$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $]0, 1]$ donc sur I donc $F(x)$ existe.

2: Appliquons le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

(H_1): Si $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$.

(H_2): La fonction $t \mapsto f(x, t)$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-xt^2}$.

(H_3): Si $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

(H_4): Si $t > 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue $]0, +\infty[$ (d'après les th usuels sur la continuité).

(H_4): Domination pour $x \in [a, +\infty[$ avec $a > 0$

$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at^2} = \varphi(t)$ et φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ donc F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ quelconque donc sur $]0, +\infty[$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$

2: Si $x > 0$ alors $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x}t)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ ($t \mapsto \sqrt{x}t$ est affine donc une bijection strictement monotone de classe C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$). On en déduit que $F(x) = \sqrt{\pi x} + C$.

Pour déterminer C , on va chercher à étendre la définition et la continuité de F à $[0, +\infty[$ pour exploiter l'égalité $F(0) = 0$. On a bien F définie en 0 et $F(0) = 0$. Montrons que F est continue sur $[0, +\infty[$. Si $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et si $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue $[0, +\infty[$.

L'inégalité $e^u \geq 1 + u$ entraîne que $0 \leq 1 - e^{-xt^2} \leq xt^2$ donc $|f(x, t)| \leq x$. Par ailleurs $|f(x, t)| \leq \frac{2}{t^2}$. Supposons

$x \in [0, 1]$ et posons $\varphi(t) = 1$ si $t \in [0, 1[$ et $\varphi(t) = \frac{2}{t^2}$ si $t \geq 1$. La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ donc F est continue sur $[0, 1]$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0$ donc $C = 0$ et donc $F(x) = \sqrt{\pi x}$.

Exercice 7 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$ et calculer sa somme.

Solution de l'exercice: Posons $u_n = \binom{n}{p} x^n = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!} x^n = \frac{x^p}{p!} \times n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1) x^{n-p}$.

On reconnaît la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la série géométrique $\sum x^n$.

Posons $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$.

D'une part, en dérivant p fois terme à terme la série entière $f^{(p)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1) x^{n-p}$

On montre par récurrence que $f^{(p)}(x) = p! \times (1-x)^{-p-1} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

On a donc $\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$

Exercice 8 (Mines ponts) Soit E un ensemble non vide.

Une partition de E est un ensemble $\mathcal{P}$ non vide de parties de E telle que si j est le cardinal de $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_j\}$ alors $\mathcal{P}$ vérifie les trois conditions:

- pour tout $i \in [[1, j]]$, A_i est non vide
- pour tout $(i, i') \in [[1, j]]^2$ tel que $i \neq i'$, on a $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$.
- $E = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_j$

On pose $T_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n le nombre de partitions d'un ensemble de $[[1, n]]$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k$.
2. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\forall x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Solution de l'exercice:

1: On admet que le nombre de partitions d'un ensemble fini E ne dépend que du cardinal de E .

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des partitions de $[[1, n+1]]$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{E}$.

Soit A la partie $[[1, n+1]]$ appartenant à contenant $n+1$. On a donc $\mathcal{P} = \{A\} \cup \mathcal{P}'$ où $\mathcal{P}'$ est une partition de $[[1, n+1]] \setminus A$.

- Soit $k \in [[0, n]]$ fixé. Si $\text{card}(A) = k+1$, $0 \leq k \leq n$, alors $\text{card}([1, n+1] \setminus A) = n-k$ donc il existe T_{n-k} différentes valeurs de $\mathcal{P}'$. La valeur de k étant fixé, il existe $\binom{n}{k}$ valeurs de A : en effet, la partie A , de cardinal $k+1$ et contenant $n+1$, est déterminée par $A \cap [[1, n]]$, partie quelconque de $[[1, n]]$ de cardinal k . Il y a donc $\binom{n}{k} T_{n-k}$ partitions p avec $\text{card}(A) = k$.

- Comme k peut varier de 0 à n , on en déduit (cardinal d'une union disjointe) que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} T_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k$ car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

2: a Soit R le rayon de convergence de $\sum \frac{T_n}{n!} x^n$. Montrons que $\frac{T_n}{n!} \leq 1$. Cette relation est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie pour $k \in [[0, n]]$, montrons la pour $n+1$:

$$\frac{T_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)(n-k)!} \frac{T_k}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)} = 1 \text{ d'où le résultat.}$$

La série entière $\sum 1x^n$ est de rayon 1 et $\left| \frac{T_n}{n!} \right| \leq 1$ donc la série entière $\sum \frac{T_n}{n!} x^n$ est de rayon $R \geq 1$.

b: Posons $a_n = \frac{T_n}{n!}$. On a d'après le calcul précédent $(n+1) a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} a_k = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = c_n$ avec $b_n = \frac{1}{n!}$.

La série $\sum b_n x^n$ est de rayon $R' = +\infty$. Pour $|x| < \min(R, R')$, la série $\sum c_n x^n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = e^x f(x).$$

Par ailleurs si $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = f'(x)$ donc $f'(x) = e^x f(x)$.

On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in](R, R[$, $f(x) = \lambda e^{e^x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1$, donc $\lambda = \frac{1}{e}$ donc $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = e^{e^x - 1}$.

3: D'après les propriétés des séries entières, f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{T_n}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc $f^{(n)}(0) = T_n$.

On a $f(x) = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^x)^k}{k!}$. Posons $u_k(x) = \frac{e^{kx}}{k!}$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_k est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et $u_k^{(n)}(x) = \frac{k^n e^{kx}}{k!}$.

- On a donc $\|u_k^{(n)}\|_{\infty}^{]-1,1[} \leq \frac{k^n e^k}{k!}$. Or $k^n = o_{k \rightarrow +\infty}(e^k)$ donc $\frac{k^n e^k}{k!} = o_{k \rightarrow +\infty}\left(\frac{e^{2k}}{k!}\right)$ et $\sum \frac{e^{2k}}{k!}$ SATP qui converge (série exponentielle en e^2)

donc la série de fonctions $\sum u_k^{(n)}$ converge normalement donc uniformément sur $] -1, 1[$ donc f est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$ et $f^{(n)}(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{(n)}(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n e^{kx}}{k!}$ donc $T_n = f^{(n)}(0) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.