Centrale 2, premiere feuille d'exercices

Exercice 1 *(Centrale 2) On considère deux matrice M_n et T_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $(M_n)_{i,j} = \inf(i,j)$ et T_n triangulaire supérieure avec des 1 sur le triangle supérieur, diagonale comprise.*

1. *Ecrire un script python permettant l'affichage de M_n pour $2 \leq n \leq 10$. Calculer* $\det(M_n)$ *pour $2 \leq n \leq 10$.*
2. *Ecrire un script python permettant l'affichage de T_n pour $2 \leq n \leq 10$, puis de $T_n^T \times T_n$. Démontrer mathématiquement les résultat observés.*
3. *Montrer que M_n est diagonalisable et de valeurs propres strictement positives. Montrer que $\max\limits_{\lambda \in sp(M_n)} \lambda \geq \dfrac{n+1}{2}$.*
4. *Justifier que M_n est inversible et calculer M_n^{-1}.*

Solution de l'exercice:

1:

```
import numpy as np
def Mat(n):
    M=np.zeros((n,n),dtype=int)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            M[i][j]=min(i+1,j+1)
    return M
for i in range(2,11):
    print(Mat(i)) #affichage des matrices
from numpy.linalg import det #importation de la fonction det de numpy.linalg
liste_det=[]
for i in range(2,11):
    liste_det.append(det(Mat(i)))
print(liste_det) # les determinants valent 1
```

2:

```
def T(n):
    M=np.zeros((n,n),dtype=int)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i<=j:
                M[i][j]=1
    return M
for i in range(2,11):
    print(T(i))
for i in range(2,11):
    M=T(i)
    print(np.dot(np.transpose(M),M)) # t(Tn)xTn=Mn pour 2<=n<=10
```

Posons $A = T_n^T$, $B = T_n$ et $C = T_n^T \times T_n$. On a $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,i} b_{k,j}$. Or $b_{k,i} = \begin{cases} 1 \text{ si } k \leq i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ donc $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)} 1 = \min(i,j)$. On en déduit que $M_n = T_n^T \times T_n$, puis que $\det(M_n) = \det\left(T_n^T \times T_n\right) = \det\left(T_n^T\right)\det(T_n) = \det(T_n)^2 = 1^2 = 1$.

3: La matrice M_n est symétrique réelle donc diagonalisable. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre et λ une valeur propre associée. On a $X^T M_n X = X^T T_n^T T_n X = (XT_n)^T (T_n X) = \|T_n X\|^2$ d'une part et $X^T M_n X = X^T \lambda X = \lambda \|X\|^2$ donc, comme $X \neq 0$, $\lambda = \dfrac{\|T_n X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

De plus, $tr(M_n) = \sum_{i=1}^{n} i = n\dfrac{n+1}{2}$ et, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propores comptées avec multiplicité, $tr(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq n \max_{\lambda \in sp(M_n)} \lambda$ donc $\max_{\lambda \in sp(M_n)} \lambda \geq \dfrac{n+1}{2}$.

4: On a $M_n = T_n^T \times T_n$ et T_n est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc inversible donc T_n^T est inversible donc M_n est inversible et $M_n^{-1} = \left(T_n^T \times T_n\right)^{-1} = T_n^{-1} \times \left(T_n^T\right)^{-1} = T_n^{-1} \times (T_n^{-1})^T$.

Or $T_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$ (car $T_n X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = y_1 \\ x_2 + \cdots + x_n = y_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$.

On en déduit que $M_n^{-1} = (I_n - J)\left(I_n - J^T\right) = I_n - J - J^T + JJ^T$ avec $J_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $J_{i,j} = 0$ sinon.

On obtient que $JJ^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $M_n^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

```
def Q(n):
    M=np.zeros((n,n),dtype=int)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i==j+1 or j==i+1:
                M[i][j]=-1
            if i==j and i<n-1:
                M[i][j]=2

    M[n-1][n-1]=1
    return M
for i in range(2,10):
    print(np.dot(Mat(i),Q(i))) # \Ca marche!!
```

Exercice 2 *(centrale maths 2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.*

1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que T est une variable aléatoire suivant une loi uniforme de $[[1, k]]$ et $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires de même loi binômiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{3}\right)$. On suppose que $T, X_1, \ldots, X_k$ sont mutuellement indépendantes. On définit la variable aléatoire Y par $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.*

    (a) *Ecrire une fonction qui simule la valeur de Y.*

    (b) *Donner une approximation de l'espérance de Y pour $k \in \{10, 30, 100, 300, 1000\}$. Que constate-t-on?*

2. *Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = [[1,k]]$. On considère $k+1$ variables aléatoires $(X_i)_{0\leq i\leq k}$ suivant une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire Y par $Y(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.*

   On suppose que X_i est d'espérance finie. Montrer que Y est d'espérance finie et donner une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(X_i)$ et $E(T)$.

Solution de l'exercice:

```
import numpy.random as rd
def Y(k):
    T=rd.randint(1,k)
    X=rd.binomial(100,1/3,T)
    S=0
    for x in X:
        S+=x
    return S
```

La loi faible des grands nombre indique que la moyenne de "tirages indédépendants converge" vers l'espérance. On fait donc un grand nombre de tirages de Y.

```
def esp(k):
    sigma=0
    for i in range(1000):
        sigma+=Y(k)
    return sigma/1000

for k in [10,30,100,300,1000]:
    print(esp(k))
167.97
505.031
1690.052
5056.625
16910.627

for k in [10,30,100,300,1000]:
    print(2*esp(k)/(k+1))
31.35727272727273
32.89567741935484
33.75421782178218
34.066644518272426
33.03802197802197
```

On a $E(T) = \dfrac{k+1}{2}$ et pour les valeurs de k examinée, $\dfrac{E(Y)}{E(T)} \simeq \dfrac{100}{3} = E(X_i)$. Il semblerait que $E(Y) = E(X_i)\,E(T)$, ce qui fait l'objet de la question suivante.

On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant la formule des probabilités totales avec le SCE $((T=i))_{1\leq i\leq k}$, on a $P(Y=n) = \sum\limits_{i=1}^{k} P((Y=n)\cap(T=i)) = \sum\limits_{i=1}^{k} P((X_1+\cdots+X_i=n)\cap(T=i))$ car $(T=i) \Rightarrow Y = X_0+\cdots+X_i$. Or $(X_1,\ldots,X_n,T)$ est une famille de variables aléatoires mutuellements indépendants donc $f(X_1,\ldots,X_n)$ et $g(T)$ sont indépendantes donc $X_0+\cdots+X_i$ et T sont indépendantes. On en déduit que $P(Y=n) = \sum\limits_{i=1}^{k} P((Y=n)\cap(T=i)) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(T=i)\times P(X_1+\cdots+X_i=n)$.

Sous réserve de sommabilité, $E(Y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n \sum\limits_{i=1}^{k} P(T=i) \times P(X_1 + \cdots + X_i = n)$ $E(Y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) = \sum_{(i,n)\in\mathbb{N}\times[[1,k]]} P(T=i)\, P(X_1+\cdots+X_i=n) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(T=i) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n \times P(X_1+\cdots+X_i=n)$.
Or chaque série $\sum n \times P(X_0+\cdots+X_i=n)$ converge absolument et a pour somme $E(X_1+\cdots+X_i)$ d'où $E(Y) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(T=i)\, E(X_1+\cdots+X_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} iP(T=i)\, E(X_1) = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} iP(T=i)\right) E(X_1) + \left(\sum\limits_{i=1}^{k} P(T=i)\right) E(X_1) = (E(T))\, E(X_1)$.

Remarque: On a $Y(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega)$ et $X_i(\omega) \in \mathbb{N}$ donc $X_i(\omega) \geq 0$ et $T(\omega) \leq k$ donc $0 \leq Y(\omega) \leq \sum\limits_{n=0}^{k} X_i(\omega) = Z(\omega)$. La variable aléatoire Z est somme de variables aléatoires admettant une espérance donc admet une espérance. Comme $0 \leq Y \leq Z$, Y admet une espérance.