mercredi 4 juin 2025

Exercice 1 (Ccinp) Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : xy' + y = \frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.

Solution de l'exercice:

1a: Sur $]0, 1[$, $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{1-x}$.

Equation homogène: $y' + \frac{1}{x}y = 0$ de solutions $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$. Idem sur $] -\infty, 0[$.

Variation de la constante: $y(x) = z(x) y_0(x)$ avec $y_0(x) = \frac{1}{x}$.

Après calcul, y vérifie $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow z'(x) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow z(x) = -\ln(1-x) + \lambda$.

1b Idem sur $] -\infty, 0[$ On obtient de même méthode sur $] -\infty, 0[$.

Sur $] -\infty, 0[$ les solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{\mu}{x} - \frac{1}{x} \ln(1-x)$.

2: Recollement des solutions

Sur $]0, 1[$ les solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}$.

Sur $] -\infty, 0[$ les solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{\mu}{x} - \frac{1}{x} \ln(1-x)$.

Prolongement par continuité en 0 :

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$ donc si $\lambda \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \pm\infty$. et on en déduit que $\lambda = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 1$.

On obtient de même que $\mu = 0$.

Conclusion: une solution sur $] -\infty, 0[$ est de la forme $x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

Dérivabilité en, 0.

La fonction définie par $f(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$

$(\frac{-\ln(1-x)}{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ donc de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ donc sur $] -\infty, 1[$ et vérifie l'équation en $x = 0$:

$0f'(0) + f(0) = f(0) = 1$. La fonction f est donc l'unique solution sur $] -\infty, 1[$.

Exercice 2 (IMT): On cherche les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x : (\mathcal{E})$$

1. Justifier que si f vérifie $(\mathcal{E})$ alors f est de classe C^∞ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

2. Déterminer les fonctions vérifiant $(\mathcal{E})$.

Solution de l'exercice:

1: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

On a donc $f'(x) = e^x - f(-x)$ donc f' est de classe C^1 comme somme de fonctions C^1 donc f de classe C^2

On montre de même que si f est C^n alors f est C^{n+1} donc f est C^∞ .

De plus, $f''(x) = e^x + f'(-x)$ or $f'(-x) = e^{-x} - f(x)$ donc f vérifie l'équation différentielle $y'' + y = e^x + e^{-x}$.

2: On remarque que $x \mapsto ch(x)$ est une solution particulière donc $f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + ch(x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Synthèse: Soit f la fonction définie par $f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + ch(x)$. On a $f'(x) + f(-x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) + sh(x) + \lambda \cos(x) - \mu \sin(x) + ch(x)$ donc $f'(x) + f(-x) = (\mu + \lambda) \cos(x) - (\lambda + \mu) \sin(x) + e^x$. Donc

f est solution du problème si et seulement si $\lambda = -\mu$ (prendre par exemple $x = 0$). L'ensemble des fonctions solutions est donc l'ensemble des fonctions $x \mapsto \lambda (\cos(x) - \sin(x)) + ch(x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (CCINP): Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f(0) = 0$. Pour

$f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$

$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes de E .

2. Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ $e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt$.

3. En déduire que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Solution de l'exercice: On admet que E est un espace vectoriel (vérification immédiate)

1: On sait que la norme infinie est une norme:
$$\left\{ \begin{array}{l} \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty : (1) \\ \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty : (2) \\ \|f\|_\infty \geq 0 \text{ et } \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0 : (3) \end{array} \right. . \text{ Il en découle}$$

facilement que (1), (2) et (3) sont vérifiées par N_1 et N_2 .

Seul $N_2(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ n'en découle pas directement.

Soit $f \in E$. Supposons $N_2(f) = 0$. On a $\|f + f'\|_\infty = 0$ donc $f' + f = 0$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 1], f(x) = \lambda e^{-x}$.

Or $f \in E$ donc $f(0) = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $f = 0$.

2: Soit $f \in E$. Posons $g(x) = e^x f(x)$. La fonction g est dérivable (car f l'est) et
$$\begin{cases} g'(x) = e^x (f(x) + f'(x)) \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

donc $g(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt = [g(t)]_0^x$.

3: Il s'agit de montrer l'existence de $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$ vérifiant: $\forall f \in F, \alpha N_2(f) \leq N_1(f) \leq \beta N_2(f)$.

Soit $f \in E$. On a $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_1(f)$. On peut donc prendre $\alpha = 1$.

On a $|e^x f(x)| = \left| \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt \right| \leq \int_0^x |e^t (f(t) + f'(t))| dt \leq \int_0^x e^x \|f + f'\|_\infty dt$

donc $|e^x f(x)| \leq x e^x \|f + f'\|_\infty \leq e^x \|f + f'\|_\infty$.

On en déduit que $\forall x \in [0, 1] |f(x)| \leq \|f + f'\|_\infty$ donc $\|f\|_\infty \leq e \|f + f'\|_\infty$.

De plus $\|f'\|_\infty = \|f + f' - f\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2 \|f + f'\|_\infty$. On peut donc prendre $\beta = 3$.

Exercice 4 (ccp 2018) On considère l'équation différentielle $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 1 : (\mathcal{E})$.

1. Trouver une solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

2. Avec le changement de variable $x = e^t$, résoudre l'équation $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

Solution de l'exercice:

1: On remarque que $x \mapsto \frac{1}{2}$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

2: Soit z la fonction définie par $z(t) = y(e^t)$. On a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t)$ donc $z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = (e^t)^2 y''(e^t) + 4e^t y'(e^t) + 2y(e^t)$ donc y vérifie $(\mathcal{E}) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = 1$ sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z vérifie $(\mathcal{E}') : z'' + 3z' + 2z = 1$ sur $\mathbb{R}$

L'équation caractéristique de admet deux racines -1 et -2 donc a pour solutions $z : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{-2t}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Or $\forall x \in]0, +\infty[, y(x) = z(\ln(x))$ donc y vérifie $(\mathcal{H})$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0, y(x) = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x^2} + \frac{1}{2}$.

Exercice 5 (Mines ponts 2018) On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ où a et b désignent des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Calculez pour deux solutions f et g de $(\mathcal{E})$ la quantité $W = fg' - f'g$.

2. On suppose a impaire et b paire. Montrez que la fonction f solution de $(\mathcal{E})$ avec les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ est paire. Montrez de même que la fonction g solution de $(\mathcal{E})$ avec les conditions initiales $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ est impaire. En déduire qu'il existe une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ constituée d'une fonction paire et impaire.

3. On suppose qu'il existe une base de l'espace des solutions de $(\mathcal{E})$ constituée d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Montrez que a est impaire et b paire.

Solution de l'exercice: Q1: On a $W' = f'g' + fg'' - f''g - f'g' = fg'' - f''g = -f(ag' + bg) + (af' + bf)g$.
Donc $X' = -aW$. On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, W(t) = \lambda e^{-A(t)}$ avec $A(t) = \int_0^t a(u) du$. En prenant la valeur en $t = 0$, on obtient que $W(t) = W(0) e^{-\int_0^t a(u) du}$.

Q2: On pose $\varphi(t) = f(-t)$. La fonction φ est deux fois dérivable et $\varphi'(t) = -f'(-t)$ et $\varphi''(t) = f''(-t)$ donc $\varphi''(t) + a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t) = f''(-t) - a(t)f'(-t) - b(t)f(-t) = f''(-t) + a(-t)f'(-t) + b(-t)f(-t) = 0$ donc φ vérifie $(\mathcal{E})$. De plus, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$. Les fonctions a et b étant continues, le théorème de Cauchy permet de dire que $\varphi = f$ donc f est paire. On montre de même, en introduisant $\psi(x) = -g(-t)$ que g est impaire.

La famille (f, g) est libre (prendre la valeur en 0 de $\lambda f + \mu g$) et l'ensemble des solutions de l'ED homogène du deuxième ordre $(\mathcal{E})$ est de dimension 2 donc admet (f, g) comme base.

Q3: Supposons que (f, g) est une base de solutions de $(\mathcal{E})$ et que f soit paire et g est impaire. Alors W est une fonction paire (car la dérivée change la parité).

Or $W(0) = f(0)g'(0) \neq 0$ car $g'(0) = 0 \Rightarrow (g(0), g'(0)) = (0, 0)$ donc par le théorème de Cauchy, $g = 0$ (car l'équation étant homogène, la fonction nulle est solution)

et de même, $f(0) = 0 \Rightarrow (f(0), f'(0)) = (0, 0)$ donc $f = 0$. On a donc $W(0) \neq 0$. On en déduit que $t \mapsto \int_0^t a(u) du$ est paire donc, par dérivation, a est impaire.

De plus $f(t) \neq 0 \Rightarrow b(t) = -\frac{f''(t) + a(t)f'(t)}{f(t)}$ et $b(-t) = -\frac{f''(-t) + a(-t)f'(-t)}{f(-t)}$ donc $b(-t) = b(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = 0$. Montrons qu'il existe $t_n \in]t - \frac{1}{n}, t - \frac{1}{n}[$ tel que $f(t_n) \neq 0$.

Sinon f est nulle sur $]t - \frac{1}{n}, t - \frac{1}{n}[$ donc $f'(t) = 0$ donc $(f(t), f'(t)) = (0, 0)$ donc $f = 0$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$ et $b(t_n) = b(-t_n)$. La fonction b est continue donc $b(t) = b(-t)$. On en déduit que b est paire.

Exercice 6 (Centrale) Pour $n \geq 1$, on pose E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels. Montrer que $\inf_{P \in E_n} \left(\int_0^1 |P(t)| dt \right) > 0$.

Solution de l'exercice: $\left\{ \int_0^1 |P(t)| dt, P \in E_n \right\}$ est non vide minoré par 0 donc $\inf_{P \in E_n} \left(\int_0^1 |P(t)| dt \right)$ existe

et $\inf_{P \in E_n} \left(\int_0^1 |P(t)| dt \right) \geq 0$

Première méthode: Supposons $\inf_{P \in E_n} \left(\int_0^1 |P(t)| dt \right) = 0$. Par la caractérisation de la borne inférieure avec les suites (fait dans une autre feuille de révision),

il existe une suite (P_k) vérifiant $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*, P_k \in E_n \\ \int_0^1 |P_k(t)| dt \leq \frac{1}{n} \end{cases}$.

L'égalité $N(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$ définit une des normes équivalentes de $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$ donc $N(P_k - 0) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0$ donc la suite (P_k) tend vers le polynôme nul.

Posons $P_k = \sum_{i=0}^n a_{i,k} X^i$ avec $a_{n,k} = 1$. La convergence dans $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$ équivaut à la convergence "coordonnée par coordonnée". Or $0 = \sum_{i=0}^n 0 X^i$ donc $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i,k} = 0$, ce qui n'est pas possible pour $i = n$ donc

$\inf_{P \in E_n} \left(\int_0^1 |P(t)| dt \right) > 0$

Deuxième méthode: On cherche à appliquer le th des bornes atteintes mais E_n n'est pas borné.

On a $\int_0^1 |t^n| dt = \frac{1}{n+1} \leq 1$.

Soit E'_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels vérifiant $\int_0^1 |P(t)| dt \leq 1$.

Les bornes inférieures de $\int_0^1 |P(t)| dt$ sur les ensembles E_n et E'_n sont égales car si $P \in E_n \setminus E'_n$ $\int_0^1 |P(t)| dt > 1$.

Montrons que E'_n est fermé et borné.

L'égalité $N(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$ définit une des normes équivalentes de $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$ et $\forall P \in E'_n, N(P) \leq 1$ donc E'_n est borné.

Soit (P_k) une suite de E'_n qui converge vers P .

On a donc $N(P_k) \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} N(P)$ donc $N(P) \leq 1$ car la fonction étant une norme, elle est lipschitzienne donc continue.

De plus les suites des coordonnées de (P_k) dans la base canonique convergent vers les coordonnées de P donc P est aussi unitaire donc $P \in E'_n$ donc E'_n est fermé. La fonction N admet donc un minimum $N(P_0)$ sur E'_n et ce minimum $N(P_0)$ est non nul car $P_0 \neq 0$ car $P_0 \in E_n$.

Exercice 7 (Mines ponts) On définit, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ et $N_2(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des norme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Les normes N_1 et N_2 sont elles équivalentes?

Solution de l'exercice: Q1: La définition de N_1 est assurée car la somme est finie et la définition de N_2 est assurée car un polynôme est continu donc borné sur le segment $[0, 1]$. De plus, N est une norme de E si et

seulement si $\begin{cases} \forall P \in E, N(P) \geq 0 : (i) \text{ et } N(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0 : (ii) \\ \forall P \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda P) = |\lambda| N(P) : (iii) \\ \forall (P, Q) \in E^Z, N(P + Q) \leq N(P) + N(Q) : (iv) \end{cases}$. Le point (i) est vérifié pour N_1 et N_2 . Si

$N_1(P) = 0$, alors $\forall k, P^{(k)}(0) = k! a_k = 0$ donc P est nul. Si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines donc est nul. Les points (iii) et (iv) pour N_1 découlent des point (iii) et (iv) pour la valeur absolue. Les points (iii) et (iv) pour N_2 (idem cours sur la norme infinie). Q2: Posons $P_n = X^n$. On a $P_n^{(k)}(0) = 0$ $P^{(n)} = n!$ donc $N_2(P_n) = n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $N_1(P_n) = 1$

Il n'existe donc par de réel C tel que $\forall n \in \mathbb{N}, N_2(P_n) \leq N_1(P_n)$

Exercice 8 (Mines ponts): Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - ny = 0 : (\mathcal{E})$.

Solution de l'exercice: Sur $]0, +\infty[$, $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y' - \frac{n}{x}y = 0$ dont les solutions sont les fonctions:

$$x \mapsto \lambda \exp(n \ln(x)) = \lambda x^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

De même, les solutions sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions $x \mapsto \mu x^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Recollement des solutions sur $\mathbb{R}$: Soit f une solutions sur $\mathbb{R}$. On a donc $\begin{cases} f(x) = \lambda x^n \text{ si } x > 0 \\ f(x) = \mu x^n \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

- Continuité en 0: On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ donc on pose $f(0) = 0$ et f est continue en 0.

- Dérivabilité en 0: On a $f'(x) = n\lambda x^{n-1}$ si $x > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ si $n \geq 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = n\lambda$ si $n = 1$. La fonction f est continue en 0 donc on peut appliquer le théorème "limite de la dérivée sur $\mathbb{R}_+$ en 0: f est dérivable

à droite en 0 et $f'_d(0) = \begin{cases} n\lambda \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$. On obtient de même que $f'_g(0) = \begin{cases} n\mu \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$. On en déduit que

- si $n \geq 2$, f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda = \mu$.

- si $n \geq 2$, f est dérivable en 0 pour toute valeur (λ, μ)

Les solutions pour $n = 1$ sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$

Les solutions pour $n = 2$ sont donc les fonctions $x \mapsto \begin{cases} f(x) = \lambda x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \mu x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(Ces fonctions vérifient bien l'équation $(\mathcal{E})$ en $x = 0$).

Remarque: Si $n \geq 2$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2 bien que l'équation soit du premier ordre).

Exercice 9 Soit E un espace normé et C une partie convexe de E .

1. Montrer que l'adhérence de C est une partie convexe de E qui contient C .

2. On appelle intérieur de C l'ensemble des points $a \in E$ qui sont intérieurs à C c'est-à-dire vérifiant :

$$\exists r > 0, \forall x \in E, \|x - a\| < r \implies x \in C.$$

Montrer que l'intérieur de C est une partie convexe de E contenue dans C .

Solution de l'exercice:

1: Notons A l'adhérence de C .

a: si $a \in C$ alors a est limite de la suite de C constante égale à a donc $a \in A$ donc $C \subset A$.

b: Soit $(a, b) \in A^2$. de sorte qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) de C qui convergent respectivement vers a et b .

Soit $\lambda \in [0; 1]$, posons $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ et $z_n = \lambda x_n + (1 - \lambda)y_n$.

- $\forall n, z_n \in C$ car x_n et y_n le sont et C est convexe.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = c$ donc $c \in A$.

On en déduit que A est convexe.

2: Notons B l'ensemble des points intérieurs de C et $\mathcal{B}_o$ les boules ouvertes.

Soit $(a, b) \in B^2$. Il existe $r_a > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(a, r_a) \subset C$ et Il existe $r_b > 0$ tel que $\mathcal{B}_o(b, r_b) \subset C$.

en posant $r = \min(r_a, r_b)$, on a $\mathcal{B}_o(a, r) \subset C$ et $\mathcal{B}_o(b, r) \subset C$.

Soit $\lambda \in [0; 1]$, posons $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$

Soit x vérifiant $\|x\| < r$. On a $c + x = \lambda a + (1 - \lambda)b + x = \lambda a + (1 - \lambda)b + (\lambda + (1 - \lambda))x$ donc $c + x = \lambda(a + x) + (1 - \lambda)(b + x) \in C$ car $a + x \in C$ et $b + x \in C$ et C est convexe.

On en déduit que $\mathcal{B}_o(c, r) \subset C$ donc $c \in B$ donc B est convexe.

Exercice 10 (ccinp)

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0 : (E)$.

2. Existe-t-il des solutions sur $]-\infty, 0[$ non développables en série entière?

Solution de l'exercice: 1: On suppose que la fonction la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon $R > 0$ et on pose,

pour $x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ La fonction y est solution de (E) si et seulement si $4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} -$

$2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 9x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$ soit $\sum_{n=1}^{+\infty} (4n(n-1) - 2n) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 9a_n x^{n+2} = 0$ c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} (4(n+1)n - 2(n+3)) a_{n+1} x^n +$

$\sum_{n=2}^{+\infty} 9a_{n-2} x^n = 0$ soit $-2a_1 + 4a_2 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((2(n+1)(2n-1)) a_{n+1} + 9a_{n-2}) x^n = 0$, c'est-à-dire $a_1 = a_2 = 0$

et $\forall n \geq 2, ((2(n+1)(2n-1)) a_{n+1} + 9a_{n-2})$ soit $\forall n \geq 0, a_{n+3} = \frac{-9a_n}{2(n+3)(2n+3)}$. On a donc par récurrence

$a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$ et $a_{3k} = -\frac{9}{(6k-3) \times (6k)} a_{3(k-1)} = -\frac{1}{2k \times (2k-1)} a_{3(k-1)} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0$ donc donc

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{3k}.$$

Si $x \geq 0$, alors $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2k} = \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ et

si $x < 0$, $(x\sqrt{-x})^{2k} = (x)^{2k} (-x)^k = (-1)^k x^{3k}$ donc $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x\sqrt{-x})^{2k}}{(2k)!} = \text{ch}(x\sqrt{-x})$ (il est inutile de déterminer le rayon de convergence car on retombe sur des séries entières connues).

2: Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $(E) \Leftrightarrow y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{9}{4}xy = 0$ et on en déduit que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Les solutions développables en série entières sont les fonctions colinéaires à $x \mapsto \cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ dont l'ensemble est un espace vectoriel de dimension 1.

Conclusion: Il existe d'autres solutions.

Exercice 11 (ccinp) On se propose de déterminer des fonctions $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant $(E) : \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(-\frac{1}{x}) = f(x)$.

1. On suppose que f vérifie (E) . Déterminer une équation différentielle du second ordre (E') vérifiée par f .
2. Quelles sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ solutions de (E') sur $]0, +\infty[$. Résoudre (E') sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$
3. Conclure.

Solution de l'exercice:

1: On a $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(-\frac{1}{x}) = f(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = f(-\frac{1}{x})$ donc f' est dérivable comme composée de fonctions dérivable.

En dérivant l'égalité, $f''(x) = \frac{1}{x^2} f'(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$ donc f vérifie $(E') : y'' - \frac{1}{x^2} y = 0$.

2. Remarque: Si α et β sont deux réels distincts, les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^\beta$ ne sont pas colinéaires car le quotient $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$ n'est pas constant sur $]0, +\infty[$.

Sur $]0, +\infty[$:

En prenant $u : x \mapsto x^a$, on trouve que u vérifie E' si et seulement si $(a(a-1) - 1)x^{a-2} = 0$ soit $(a(a-1) - 1) = 0$ soit $a^2 - a - 1 = 0$.

On trouve $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = r_1$ et $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = r_2$.

On en déduit que $f_i : x \mapsto x^{r_i}$ est solution de (E') pour $i \in \{1, 2\}$.

Or (f_1, f_2) est libre (remarque) et on peut appliquer le th de structure des équations linéaires homogènes d'ordre 2: l'ensemble des solutions de (E') est un espace vectoriel de dimension 2 donc est égal à $\text{vect}(f_1, f_2)$.

Sur $]-\infty, 0[$:

En prenant $u : x \mapsto (-x)^a$, on trouve que u vérifie E' si et seulement si $(a(a-1) - 1)x^{a-2} = 0$ soit $(a(a-1) - 1) = 0$ soit $a^2 - a - 1 = 0$.

On trouve $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = r_1$ et $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = r_2$.

On en déduit que $g_i : x \mapsto (-x)^{r_i}$ est solution de (E') pour $i \in \{1, 2\}$.

Or (g_1, g_2) est libre et on peut appliquer le th de structure des équations linéaires homogènes d'ordre 2: l'ensemble des solutions de (E') est un espace vectoriel de dimension 2 donc est égal à $\text{vect}(g_1, g_2)$.

3 Si f vérifie (E) alors f vérifie (E') sur

donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x > 0, f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$ et $\exists (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x > 0, f(x) = \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x)$.

Si $x > 0$, alors $f'(x) = \lambda_1 r_1 x^{r_1-1} + \lambda_2 r_2 x^{r_2-1} = \lambda_1 r_1 x^{-r_2} + \lambda_2 r_2 x^{-r_1}$ car $r_1 + r_2 = 1$ et $f(-\frac{1}{x}) = \mu_1 x^{-r_1} + \mu_2 x^{-r_2}$.

En utilisant la remarque, $\forall x > 0, f'(x) = f(-\frac{1}{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 r_1 = \mu_2 \\ \lambda_2 r_2 = \mu_1 \end{cases}$.

On trouve la même condition pour $x < 0$.

Exercice 12 (ccinp) Soit la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. En déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la somme S de cette série entière et calculer $S(x)$.

Solution de l'exercice:

1: On a $1 \leq a_n \leq n^2$ pour $n = 1$ et $n = 2$. Soit $n \geq 1$ vérifiant $1 \leq a_{n-1} \leq (n-1)^2$ et $1 \leq a_n \leq n^2$. On a alors $1 \leq a_n \leq a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \leq n^2 + \frac{2(n-1)^2}{n+1} \leq n^2 + 2(n-1) \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ donc $\forall n, 1 \leq a_n \leq n^2$.

2: On sait que si $0 \leq b_n \leq c_n$, le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum c_n x^n$. De plus $\sum x^n$ et $\sum n^2 x^n$ ont même rayon de convergence égal à 1 (la multiplication par n ne change pas le rayon de convergence) donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1.

3: Pour $n \geq 0$, $(n+2)a_{n+2} = (n+2)a_{n+1} + 2a_n$. Si $|x| < 1$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum na_n x^n$ convergent et $(n+2)a_{n+2}x^{n+1} = (n+2)a_{n+1}x^{n+1} + 2a_n x^{n+1}$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$.

On peut dériver terme à terme sur $] -1, 1[$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+1} =$

$S'(x) - a_1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^{n+1} = xS'(x)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} = S(x) - a_0$ donc les séries entières convergent pour $x \in] -1, 1[$ et $S'(x) - a_1 - (xS'(x) + (S(x) - a_0)) - 2xS(x) = 0$ soit $(1-x)S'(x) - (2x+1)S(x) = 0$. Une primitive de $a(x) = \frac{-2x-1}{1-x} = \frac{-2x+2}{1-x} - \frac{3}{1-x} = -2 - \frac{3}{1-x}$ est $-2x - 3\ln(1-x)$. On en déduit que

$$S(x) = \lambda e^{-2x} e^{-3\ln(1-x)} = \lambda \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}. \text{ Comme } S(0) = a_0 = 1, S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}.$$

Commentaire: On pourrait tirer une expression de a_n en développant l'expression obtenue (avec un produit de Cauchy).

Exercice 13 (IMT) Soit $\lambda > 0$ et (E) l'équation différentielle $xy' + \lambda y = \frac{1}{1+x}$.

1. Exprimer à l'aide d'une intégrale les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer qu'il existe une unique solution bornée au voisinage de 0^+ .

Solution de l'exercice:

1: Soit (H) : $xy' + \lambda y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{\lambda}{x}y = 0$ l'équation homogène associée à l'équation linéaire (E) sur $]0, +\infty[$.

Les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mu e^{-\lambda \ln(x)} = \mu x^{-\lambda}$. Posons $y(x) = z(x)x^{-\lambda}$ (variation de la constante). On a $xy'(x) + \lambda y(x) = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow xx^{-\lambda}z'(x) = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow z'(x) = \frac{x^{\lambda-1}}{(1+x)}$. Une solution particulière

est obtenue avec $z(x) = \int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ soit $y_p(x) = x^{-\lambda} \int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ donc les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

sont les fonctions définies par $y(x) = x^{-\lambda} \left(\int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt + \mu \right)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ fixé.

2: On a $\lambda > 0$ donc $1 - \lambda < 1$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}} dt$ est convergente. De plus, $\frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^{1-\lambda}} > 0$ donc

l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ est convergente. et la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ a pour limite $-\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ lorsque x tend vers 0^+ .

Si $\mu \neq \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_1^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt + \mu \right) \neq 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} y(x) = \div \infty$.

Si $\mu = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt$ alors $y(x) = x^{-\lambda} \int_0^x \frac{1}{t^{1-\lambda}(1+t)} dt \leq x^{-\lambda} \int_0^x \frac{1}{t^{1-\lambda}} dt$. Or $\int_0^x \frac{1}{t^{1-\lambda}} dt = \int_0^x t^{\lambda-1} dt =$

$$\left[\frac{1}{\lambda} t^\lambda \right]_0^x = \frac{1}{\lambda} x^\lambda \text{ donc } 0 \leq y(x) \leq \frac{1}{\lambda} \text{ et est donc une fonction bornée.}$$

Exercice 14 (ccinp 2018) On considère l'équation différentielle $t(t^2 - 1)x'(t) + 2x(t) = t^2 : (\mathcal{E})$

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t - 1} + \frac{c}{t + 1}$.

2. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $]1, +\infty[$.

3. Soit la fonction $f : t \rightarrow \begin{cases} \frac{\ln(t)}{t-1} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$ définie sur $]0, +\infty[$ et $g : h \rightarrow \begin{cases} \frac{\ln(1+h)}{h} & \text{si } h \neq 0 \\ 1 & \text{si } h = 0 \end{cases}$ définie sur $] -1, +\infty[$. Montrer que les fonctions f et g sont de classe C^∞ .

4. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

5. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice: Q1: $\frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1} = \frac{(a+b+c)t^2 + (b-c)t - a}{t(t^2-1)}$. Le triplet $(a, b, c) = (-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ convient.

Q2: Sur $]1, +\infty[$, $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow x'(t) + \frac{2}{t(t^2-1)}x(t) = \frac{t^2}{t(t^2-1)}$. Une primitive de $t \mapsto \frac{2}{t(t^2-1)}$ est $t \mapsto -2 \ln(t) + \ln(t-1) + \ln(t+1)$ donc l'équation homogène a pour solution $t \mapsto \lambda e^{2 \ln(t) - \ln(t-1) - \ln(t+1)} = \lambda \frac{t^2}{t^2-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. En posant $y(t) = z(t) \frac{t^2}{t^2-1}$, y vérifie $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow z'(t) \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2}{t(t^2-1)} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{t}$. On en déduit que les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]1, +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{(\ln(t) + \lambda)t^2}{(t^2-1)}$.

Q3: $g(h) = \frac{\ln(1+h)}{h} = -\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} h^n}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} h^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} h^n$ donc g est développable en série entière sur $] -1, 1[$ donc est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. On a $f(t) = g(t-1)$ donc f est aussi de classe C^∞ .

Q4: En procédant de même, les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0, 1[$ sont les fonctions $t \mapsto \frac{(\ln(t) + \mu)t^2}{(t^2-1)}$.

D'après Q3, la fonction $t \mapsto \frac{t^2 \ln(t)}{(t^2-1)} = \frac{\ln(t)}{t-1} \times \frac{t^2}{t+1}$ admet une limite réelle en $t = 1$ donc le recollement par continuité en 1 donne $\lambda = \mu = 1$.

On a donc $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \ln(t)}{(t^2-1)} & \text{si } t \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \end{cases}$ et cette fonction est C^∞ donc de classe C^1 d'après Q3.

Q5: Soit $x :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$. Posons $z(t) = x(-t)$.

La fonction x vérifie $(\mathcal{E})$ sur $] -\infty, 0[$ si et seulement si

$$\forall t \in]-\infty, 0[\quad t(t^2-1)x'(t) + 2x(t) = t^2 \quad \text{soit } \forall t \in]0, +\infty[\quad (-t)((-t)^2-1)x'(-t) + 2x(-t) = (-t)^2 \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\forall t \in]0, +\infty[\quad t(t^2-1)z'(t) + 2z(t) = t^2. \quad \text{soit } z(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \ln(t)}{(t^2-1)} & \text{si } t \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 1 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } x(t) = \begin{cases} \frac{t^2 \ln(-t)}{(t^2-1)} & \text{si } t \neq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = -1 \end{cases}$$

Il reste à étudier le recollement en 0.

On a bien $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln(t) = 0$ et on peut donc poser $x(0) = 0$.

En posant $u(t) = t^2 \ln(t)$, on a $u'(t) = 2t \ln(t) + t$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} u'(t) = 0$. On en déduit, à l'aide du théorème limite de la dérivée, que x est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On montre de même que x est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ (la fonction x est paire)

Exercice 15 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \cos(\alpha \times \arcsin(x))$.

1. Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la fonction f sur un intervalle à préciser.

2. En déduire un développement en série entière de f .

3. Pour quelles valeurs de α la fonction f est-elle polynômiale?

Solution de l'exercice: 1: On a, pour $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = -\alpha \frac{\sin(\alpha \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f''(x) = -\alpha^2 \frac{\cos(\alpha \arcsin x)}{1-x^2} - x\alpha \frac{\sin(\alpha \arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ donc la fonction f est solution de $(\mathcal{E}) : (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$.

2: La fonction f est solution de $(\mathcal{E})$ et vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. D'après le théorème de Cauchy, f est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $]-1, 1[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Cherchons des fonctions développables en séries entières sur $]-R, R[$ avec $R > 0$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ solutions de $(\mathcal{E})$ et vérifiant $a_0 = 1$ et

$a_1 = 0$. Posons $h(x) = (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = (1-x^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'où

$$h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2 - n^2)a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} - (\alpha^2 - n^2)a_n \right) x^n. \text{ La fonction}$$

y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)} a_n$ d'où $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et

$$a_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (k^2 - \alpha^2)}{(2p)!}. \text{ Vérifions que } y \text{ est bien définie: on } \left| \frac{a_{n+2} x^{n+2}}{a_n x^n} \right| = \left| \frac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)} x^2 \right| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} |x^2| \text{ donc la}$$

série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$ donc $R = 1$.

On en déduit que y et f vérifient la même équation avec les mêmes conditions de Cauchy donc $y = f$.

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} \text{ avec } a_{2p} = \frac{\prod_{k=1}^{p-1} ((2k)^2 - \alpha^2)}{(2p)!}.$$

benigno

Exercice 16 Soit les équations $(E_0) : x^2 y'' - 2y = 0$ et $(E) : x^2 y'' - 2y = x^3$.

1. Trouver une solution polynomiale u de (E_0) .

2. Trouver une fonction v solution de (E_0) , indépendante de u , écrite sous la forme $v(x) = u(x)z(x)$ avec z de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

3. Déduire de la question précédente les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

4. Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice:

1: On remarque que $y : x \mapsto x^2$ est une solution polynomiale de (E_0) .

(Si on ne la voit pas, en notant n le degré d'une solution polynomiale $y : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ de (E_0) avec $a_n \neq 0$, en identifiant les termes en x^n dans (E_0) , on a $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$ donc, comme $a_n \neq 0$, il vient $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = 0$ donc $n = 2$ car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, s'il existe une solution polynomiale de (E_0) , elle est forcément de degré 2. Ensuite, en notant $y(x) = ax^2 + bx + c$ et en reportant dans (E_0) , il reste $\forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 - 2(ax^2 + bx + c) = -2bx - c = 0$ donc $b = c = 0$ et on a bien $y(x) = ax^2$).

2: Si on se donne une fonction v de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, en posant $z(x) = \frac{v(x)}{x^2}$, la fonction z est aussi de classe C^2 et $v(x) = x^2 z(x)$ donc $v'(x) = 2xz(x) + x^2 z'(x)$ puis $v''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2 z''(x)$. Ainsi, v est solution de (E_0) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\forall x \in I, 2x^2 z(x) + 4x^3 z'(x) + x^4 z''(x) - 2x^2 z(x) = 0$ ou encore $(F) : xz''(x) + 4z'(x) = 0$ ce qui équivaut au fait que z' vérifie $(G) : xw' + 4w = 0$ sur I soit à:

il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x^4}$ et les solutions de (F) sont donc les fonctions $z : x \mapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ avec

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on trouve donc $z(x) = \frac{1}{x^3}$ donc $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et elle est bien indépendante de u .

3: Comme l'équation (E_0) est linéaire, homogène et normalisée, l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ est un espace vectoriel de dimension 2, il est donc engendré par u et v d'après les deux questions précédentes. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On constate comme en a. que $y_p : x \mapsto \frac{x^3}{4}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

4: - Analyse : soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Les restrictions de y à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les solutions vues en c. donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x < 0, y(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \beta_1 x^2 + \frac{x^3}{4}$ et $\forall x > 0, y(x) = \frac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \frac{x^3}{4}$. En prenant $x = 0$ dans (E) , on a $y(0) = 0$. La continuité de y en 0 implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Alors on a $y'_d(0) = 2\beta_2 \times 0 = 0 = y'_g(0)$ donc y est dérivable en 0 et $\forall x \leq 0, y'(x) = 2\beta_1 x + \frac{3x^2}{4}$ et $\forall x \geq 0, y'(x) = 2\beta_2 x + \frac{3x^2}{4}$.

On a alors $y''_d(0) = 2\beta_2$ et $y''_g(0) = 2\beta_1$ donc $\beta_1 = \beta_2$.

- Synthèse : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$, alors y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et y vérifie aussi (E) en $x = 0$ (tous les termes s'annulent en 0).

Conclusion : les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 (Mines ponts) Soit $a \in]0; 1[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de f .
2. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$.

Solution de l'exercice: 1a: Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Ainsi, par composition, $x \mapsto f(ax)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f' aussi ce qui montre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Si on suppose que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour un entier $n \geq 1$, alors $x \mapsto f(ax)$ est aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$ donc f' l'est encore et f est donc de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Par principe de récurrence, f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1b: Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $af'(x) = f(ax)$ donc $f''(x) = af'(ax) = af(a^2x)$.

On continue: $f'''(x) = a \times a^2 f'(a^2x) = a^{1+2} f(a^3x)$ et $f^{(4)}(x) = a^{1+2} a^3 f'(a^3x) = a^{1+2+3} f(a^4x)$.

Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$, qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} f(a^n x)$. Alors, en dérivant cette relation, on a $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \times a^n f'(a^n x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^{n+1} x)$. Comme on a $f^{(0)}(x) = f(x) = a^{\frac{0(0-1)}{2}} f(a^0 x)$, on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} f(a^n x)$.

2: Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction, f étant continue sur le segment $[0, x]$ (ou $[x, 0]$) elle y est bornée et on peut poser $M = \|f\|_{\infty}^{[0;x]}$ et $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{[0;x]}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1}|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$ (Taylor Lagrange)

Or $f^{(n+1)}(t) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^{n+1}t)$ et $a^n t \in [-b; b]$ si $t \in [0, x]$ car $|a| < 1$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leq a^{\frac{n(n+1)}{2}} M$.

Par inégalité triangulaire, on a $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} M}{n!}$ et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$

car $|a| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \right| = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$. et comme $f^{(k)}(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}} f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_\lambda(x) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$. Si on pose $a_k = \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} > 0$, on a

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a^k}{k+1}$ donc, comme $0 < a < 1$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$ donc, par D'ALEMBERT, le rayon de convergence de la

série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ vaut $R = +\infty$ ce qui justifie que la fonction g_λ est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, g'_\lambda(x) = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a \frac{k(k-1)}{2} x^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a \frac{k(k+1)}{2} x^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a \frac{k(k-1)}{2} (ax)^k}{k!} = g_\lambda(ax)$. Avec ce qui précède, les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$ sont les fonctions proportionnelles à $g_1 : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a \frac{k(k-1)}{2} x^k}{k!}$, elles constituent donc une droite vectorielle $\text{Vect}(g_1)$.