Vendredi 6 juin 2025

Exercice 1 *Déterminer les extrémums de* $(x,y) \to y\left(x^2+(\ln(y))^2\right)$ *sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

Solution de l'exercice: Posons $f(x,y)=y\left(x^2+(\ln(y))^2\right)$
1 appliquation du théorème sur les points critiques.
a: La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$
b: l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$: on pose $g(x,y)=y$ alors $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x,y)>0\}$ avec g fonction continue donc $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
Un extrémum local de f est donc nécessairement atteint en un point critique de f.
$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+(\ln(y))^2+2\ln(y) \end{cases}$ donc $\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (\ln(y)+2)\ln(y)=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow (x,y)=(0,1)$ ou $(x,y)=(0,e^{-2})$.
2: Etude des poionts critiques
a: Etude du point $(0,1)$: On a $f(0,1)=0$ et $f(x,y)\geq 0$ donc f admet un minimum global en $(0,1)$.
b: Etude du point $(0,e^{-2})$:
Première méthode: Utilisation de la Hessienne:
$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2\dfrac{\ln(y)+1}{y} \end{pmatrix}$ donc $H_f(0,e^2)=\begin{pmatrix} 2e^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{-2}{e^2} \end{pmatrix}$
On a $sp(H_f)=\left\{2e^2,\dfrac{-2}{e^2}\right\}$ donc H_f admet une valeur propre strictement négative et une valeur propre strictement positive donc n'admet pas d'extremémum local en $(0,e^{-2})$.
Autre méthode: Posons $\Delta(h,k)=f(h,e^{-2}+k)-f(0,e^{-2})=(e^{-2}+k)\left(h^2+(\ln(e^{-2}+k))^2\right)-e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2$.
On a $\Delta(h,0)=e^{-2}\left(h^2+(\ln(e^{-2}))^2\right)-e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2=e^{-2}h^2>0$ si $h\neq 0$.
et $\Delta(0,k)=(e^{-2}+k)(\ln(e^{-2}+k))^2-4e^{-2}$. Or $\ln(e^{-2}+k)=\ln(e^{-2})+\ln(1+ke^2)=-2+ke^2-\dfrac{k^2e^4}{2}+o_{k\to 0}(k^2)$
donc $\Delta(0,k)=(e^{-2}+k)(4-4ke^2+2k^2e^4+o_{k\to 0}(k^2))-4e^{-2}$
soit $\Delta(0,k)=-2k^2e^2+o_{k\to 0}(k^2)<0$ pour $h\neq 0$ sufffisamment petit.
On en déduit que f n'admet pas d'extrémum local en $(0,e^{-2})$ (point selle).

Exercice 2 *(ccinp): Soit* φ *une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* C^2. *Soit* F *la fonction définie sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ *par* $F(x,y)=\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
Déterminer les fonctions φ *pour lesquelles la fonction* F *vérifie l'équation* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=0:(\mathcal{E})$.

Solution de l'exercice: La fonction φ étant de classe C^2, $x\mapsto\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ est dérivable de dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{y}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
De même, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)=\frac{1}{y^2}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{x}{y^2}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{2x}{y^3}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)+\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^2\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
On en déduit que $y^2\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)\right)=\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)+2\dfrac{x}{y}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et que F vérifie $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R}$, $(1+t^2)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=0$ soit $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi'(t)=\lambda e^{-\ln\left(1+t^2\right)}=\dfrac{\lambda}{1+t^2}$ et donc si et seulement si $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\lambda\arctan(t)+\mu$.

Exercice 3 *(ccinp 2018) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$*

1. *Montrer que f admet un point critique mais n'y atteint pas d'extremum local.*
2. *Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Justifier que D est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Montrer qu'il existe (x_0, y_0) et(x_1, y_1) appartenant à D tel que $\forall (x,y) \in D,\ f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \leq f(x_1, y_1)$. Donner la valeur de $f(x_0, y_0)$ et $f(x_1, y_1)$. (on pourra considérer $\varphi : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$).*

Solution de l'exercice:
1: La fonction f est définie et de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ donc si f admet un extremum en (x,y) alors (x,y) est un point critique de f. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$. On a donc $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.
Remarque: le passage par la hessienne ne permet pas de conclure car $0 \in sp(H_f(0,0))$
Or $f(x,y) = x^2(y+1) + y^3$ donc $f(0,y) - f(0,0) = y^3$ qui change de signe en $y = 0$ donc f n'admet pas d'extrémum local en $(0,0)$.
2: L'ensemble D est fermé car $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x,y) \leq 0\}$ avec $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ qui est continue.
3 Soit g la restriction de f à D.
L'ensemble D est borné.(c'est la boule unité pour la norme usuelle) et fermé et g est continue donc g admet un maximum et un minimum, ce qui répond à la première partie de la question.
Posons $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x,y) < 0\}$.
a: recherche des extrémum locaux dans O:
L'ensemble O est ouvert car h est continue donc, g admet un extremum local en $(x,y) \in O$ alors (x,y) est un point critique. La première question entraîne que f n'admet pas d'extremum local dans O.
On en déduit que le maximum et le minimum de g sont atteint sur $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$.
Recherche des extrémum Soit $(x,y) \in C$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (\cos(t), \sin(t))$. On a $g(x,y) = x^2 + y(x^2 + y^2) = x^2 + y = \cos^2(t) + \sin(t) = \varphi(t)$. On a $\varphi'(t) = -2\sin(t)\cos(t) + \cos(t) = \cos(t)(1 - 2\sin(t))$.
La fonction φ est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Son maximum est dans $\left\{\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right\}$. Or $\left(\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4}\right)$ donc $M = \dfrac{5}{4}$et il est atteint aux points $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. Son minimum est dans $\left\{\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right\}$. Or $\left(\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right), \varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right) = (1, -1)$ donc $m = 1$ et il est atteint au point $(0, -1)$.

Exercice 4 *(Ccinp) On s'intéresse aux fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant*

$$(E) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\left\{\begin{array}{c} x(u,v) = u \\ y(u,v) = u^2 + v \end{array}\right.$ *et* $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

1. *Montrer que f vérifie (E) si et seulement si $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0$.*
2. *Déterminer les solutions de (E).*

Solution de l'exercice: 1: Les fonctions $(u,v) \mapsto x(u,v)$ et $(u,v) \mapsto y(u,v)$ sont de classe C^1 donc si f est de classe C^1 alors F est de classe C^1 et (règle de la chaîne)
on a $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2u\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$.
2: donc f verifie (E) si et seulement si il existe une fonction C de classe C^1 telle que $F(u,v) = C(v)$ soit $f(x,y) = C(y - x^2)$.

Exercice 5 *(Ccinp) On s'intéresse aux fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant*

$$(E) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\left\{ \begin{array}{c} x(u,v) = u \\ y(u,v) = u^2 + v \end{array} \right.$ *et* $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

1. *Montrer que f vérifie (E) si et seulement si $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0$.*
2. *Déterminer les solutions de (E).*

Solution de l'exercice: 1: Les fonctions $(u,v) \mapsto x(u,v)$ et $(u,v) \mapsto y(u,v)$ sont de classe C^1 donc si f est de classe C^1 alors F est de classe C^1 et (règle de la chaîne)
on a $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2u\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$.
2: donc f verifie (E) si et seulement si il existe une fonction φ de classe C^1 telle que $F(u,v) = \varphi(v)$ soit $f(x,y) = \varphi(y - x^2)$.

Exercice 6 *(CCINP PSI 21) On cherche une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue vérifiant la condition:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt : (E)$$

1. *Résoudre, suivant la valeur du réel c l'équation $y'' - cy = 0$.*
2. *Soit f une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $F : (x,y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$. Montrer que F est de classe C^2 et préciser $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.*
3. *Soit f une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue vérifiant (E). Déterminer $f(0)$. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$. En déduire les solutions de (E).*

Solution de l'exercice:
1: Les solutions sont les fonctions

$$x \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \lambda + \mu x \text{ si } c = 0 \\ \lambda \cosh\left(\sqrt{c}x\right) + \mu \sinh\left(\sqrt{c}x\right) \text{ si } c > 0 \\ \lambda \cos\left(\sqrt{-c}x\right) + \mu \sin\left(\sqrt{-c}x\right) \text{ si } c > 0 \end{array} \right.$$

où λ et μ sont des réels quelconques.
2: Soit u une primitive de f. On a $F(x,y) = u(x+y) - u(x-y)$. La fonction f est C^1 donc g est C^2 donc F est C^2 et
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = g'(x+y) - g'(x-y) = f(x+y) - f(x-y)$. On en déduit que
$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f'(x+y) - f'(x-y)$.
De même $\dfrac{\partial F}{\partial y} = f(x+y) + f(x-y)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = f'(x+y) - f'(x-y)$ donc $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.
3: En prenant $x = y = 0$ dans (E), on obtient $f(0) = 0$.
Si f est la fonction nulle, alors f est de classe C^2. Sinon, il existe $y \in \mathbb{R}$, $f(y) \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{f(y)} \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$.
Soit u une primitive de f. On a $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = u(x+y) - u(x-y)$ donc $x \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$ est dérivable de

dérivée $x \mapsto u'(x+y) - u'(x-y) f(x+y) - f(x-y)$ qui est continue donc f est de classe C^1 et $f'(x) = \dfrac{1}{f(y)}(f(x+y) - f(x-y))$ donc f' est de classe C^1 donc f est de classe C^2.
L'égalité $F(x,y) = f(x) f(y)$ permet un deuxième calcul de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ qui donne $f''(x) f(y) - f(x) f''(y)$. On en déduit que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f''(x) f(y) - f(x) f''(y) = 0.$$

La fonction nulle est solution de (E). Supposons $f \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \neq 0$. Posons $c = \dfrac{f''(y)}{f(y)}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - cf(x) = 0$$

En utilisant Q1 et le fait que $f(0) = 0$, on obtient les fonctions de la forme $f = x \mapsto \mu x$ ou $f : x \mapsto \mu \sin(\alpha x)$ ou $f : x \mapsto \mu \sinh(\alpha x)$ avec μ et α réels quelconques.
Synthèse:
$f = 0$ est solution. Dans la suite, on suppose $f \neq 0$ donc $\mu \neq 0$ et $\alpha \neq 0$.
Pour $f : x \mapsto \mu x$, on a $f(x) f(y) = \mu^2 xy$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt = \mu \left(\dfrac{(x+y)^2}{2} - \dfrac{(x-y)^2}{2} \right) = 2\mu xy$ donc f est solution si et seulement si $\mu^2 = 2\mu$ soit $\mu = 2$.
Pour $f : x \mapsto \mu \sin(\alpha x)$ on a $f(x) f(y) = \mu^2 \sin(\alpha x) \sin(\alpha y) = \dfrac{\mu^2}{2}(\cos(\alpha(x-y)) - \cos(\alpha(x+y)))$ et $\int_{x-y}^{x+y} \mu \sin(\alpha x$
$\dfrac{\mu}{\alpha}(-\cos(\alpha(x+y)) + \cos(\alpha(x-y)))$.
donc f est solution si et seulement si $\dfrac{\mu^2}{2} = \dfrac{\mu}{\alpha}$ soit $\alpha = \dfrac{2}{\mu}$.
Pour $f : x \mapsto \mu \sinh(\alpha x)$ on a $f(x) f(y) = \mu^2 \sinh(\alpha x) \sinh(\alpha y) = \dfrac{\mu^2}{2}(\cosh(\alpha(x+y)) - \cos(\alpha(x-y)))$ car $\sinh(a) \sinh(b) = \dfrac{e^a - e^{-a}}{2} \dfrac{e^b - e^{-b}}{2} = \dfrac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{4} - \dfrac{e^{a-b} + e^{-a+b}}{4} = \dfrac{1}{2}(\cosh(a+b) - \cosh(a-b))$
et $\int_{x-y}^{x+y} \mu \sinh(\alpha x)\, dt = \dfrac{\mu}{\alpha}(\cosh(\alpha(x+y)) - \cosh(\alpha(x-y)))$.donc f est solution si et seulement si $\dfrac{\mu^2}{2} = \dfrac{\mu}{\alpha}$ soit $\alpha = \dfrac{2}{\mu}$.

Exercice 7 *(Navale 2018) Soit S la surface d'équation $x^2 - y^2 - z = 1$ et P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Déterminer l'ensemble des points M de S tels que le plan tangent à S en M soit parallèle à P.*

Solution de l'exercice: Le plan tangent à S d'équation $f(x,y,z) = 0$ en un point régulier est normal au gradient de f. Ici, $\operatorname{grad}(f) = (2x, 2y, -1)$. Un vecteur normal à P est $\overrightarrow{n} = (1, 2, -1)$. Le plan tangent à S en M de coordonnées (x,y,z) est parallèle à P si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\operatorname{grad}(f)$ sont colinéaires soit $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$. Or $M \in S$ donc $z = x^2 - y^2 - 1 = -\frac{7}{4}$ d'où $M = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{7}{4}\right)$.

Exercice 8 *(Mines Psi 2015) Soit H la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $H(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $H(0,0) = 0$. Montrer que la fonction H est continue sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe C^1 ?*

Solution de l'exercice 1: Continuité: Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues donc la fonction H est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ d'après les théorèmes sur les opérations sur fonctions continues. De plus, $|H(x,y)| \leq \dfrac{|x^4 y|}{x^4} = |y|$ donc $\lim_{(x,y) \to (0,0)} H(x,y) = 0$ donc H est continue en 0.
2 Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe C^1 donc la fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ d'après les

théorèmes sur les opérations sur fonctions de classe C^1. On a $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) = 4\dfrac{x^3y^3}{(x^4+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = x^4\dfrac{x^4-y^2}{(x^4+y^2)^2}$.

3 Existence de dérivées partielles en $(0,0)$: Si $x \neq 0$, $\dfrac{H(x,0)-H(0,0)}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to 0}\dfrac{H(x,0)-H(0,0)}{x}$ donc $\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. De même $\dfrac{\partial H}{\partial y}(0,0) = 0$. Montrons que la fonction $\dfrac{\partial H}{\partial y}$ n'est pas continue en 0. On a $\dfrac{\partial H}{\partial y}(t,0) = t^4\dfrac{t^4}{t^8} = 1$. On a donc $\lim_{t\to 0}\dfrac{\partial H}{\partial y}(t,0) = 1 \neq \dfrac{\partial H}{\partial y}(0,0)$. On en déduit que $\dfrac{\partial H}{\partial y}$ n'est pas continue en 0 donc que H n'est pas de classe C^1.

Exercice 9 *(IMT) Soit f la fonction définie, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par* $f(x,y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ *$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.*
2. *Montrer que f est de classe C^1 sur D et calculer ses dérivées partielles.*
3. *Déterminer la valeur de f.*

Solution de l'exercice:

1. On a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 1\}$ (faire une figure). On remarque (admis) que D est la réunion de 3 ouverts convexes disjoints $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > \frac{1}{x}\right\}$, $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < 0 \text{ et } y < \frac{1}{x}\right\}$ et $D_3 = D\backslash(D_1 \cup D_2)$.

2. Les théorèmes sur les opérations sur les fonctions de classe C^1 entraînent que f est bien de classe C^1 sur D et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2} \times \dfrac{1-xy-y(x+y)}{(1-xy)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$ or $(1-xy)^2+(x+y)^2 = x^2y^2+x^2+y^2+1 = (y^2+1)(x^2+1)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$. On a de même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

3. Soit $i \in \{1,2,3\}$. L'ensemble D_i est un ouvert (défini par inégalités stricts)
   et D_1 et D_2 sont convexes (voir exercice dont l'énoncé est en fin de feuille).et $\nabla(f) = 0$ donc f est constante sur D_1 et sur D_2.
   - Si $x > 1$, $(x,x) \in D_1$, $f(x,x) = 2\arctan(x) - \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) \to_{x\to+\infty} \pi$ donc $\forall (x,y) \in D_1$, $f(x,y) = \pi$.
   - De même $\forall (x,y) \in D_2$, $f(x,y) = -\pi$.
   - Pour D_3, il y a une difficulté supplémentaire car D_3 n'est pas convexe.
   Par contre, $\forall a \in D_3$ le segment $[(0,0),a]$ est compris dans D_3 et en adaptant la démonstration du cours, on montre que $f(a) = f((0,0))$ donc f est constante sur D_3.
   Or $f(0,0) = 0$ donc $\forall (x,y) \in D_3$, $f(x,y) = 0$ (soit $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$).

Exercice 10 *(centrale) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.*

1. *f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?*
2. *Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$?*
3. *La fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$? Si oui, les calculer.*

4. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Solution de l'exercice:

1: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (th opérations).

Utilisons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en $a=0$: $|\sin(x)-x|\leq\dfrac{x^2}{2}$.

On a $|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2}-\frac{xy-yx}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{x(\sin(y)-y)-y(\sin(x)-x)}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x(\sin(y)-y)}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y(\sin(x)-x)}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{|x|\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2}+\frac{|y|\frac{x^2}{2}}{x^2+y^2}=\dfrac{|x|+|y|}{2}$.

La fonction $(x,y)\mapsto\dfrac{|x|+|y|}{2}$ est continue de limite 0 en $(0,0)$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to0}f(x,y)=f(0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$.

2: Si $(x,y)\neq(0,0)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\sin y-y\cos x}{x^2+y^2}-2x\frac{x\sin y-y\sin x}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\sin x-x\cos y}{x^2+y^2}-2y\frac{x\sin y-y\sin x}{(x^2+y^2)^2}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (th opérations) donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

3: On a $f(x,0)=0$ donc $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0\to_{x\to0}0$. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.

De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

4: On a $\sin y=y+O_{y\to0}(y^3)$ et $\cos x=1+O_{x\to0}(x^2)$. On en déduit

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\sin y-y\cos x}{x^2+y^2}-2x\frac{x\sin y-y\sin x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y+O_{y\to0}(y^3)-y(1+O_{x\to0}(x^2))}{x^2+y^2}-2x\frac{x(y+O_{y\to0}(y^3))-y(x+O_{y\to0}(x^3))}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{O_{y\to0}(y^3)-yO_{x\to0}(x^2)}{x^2+y^2}-2x\frac{xO_{y\to0}(y^3)-yO_{y\to0}(x^3)}{(x^2+y^2)^2}\to_{(x,y)\to(0,0)}0$

(par exemple, si $x\times y\neq0$, $(x^2+y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4\geq2x^2y^2>0$ donc $\left|\frac{x^2O_{y\to0}(y^3)}{(x^2+y^2)^2}\right|\leq\frac{x^2O_{y\to0}(y^3)}{2x^2y^2}=O_{y\to0}(y)\to_{(x,y)\to(0,0)}0$ et les autres termes s'étudient de la même manière).

On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11 *(IMT) Trouver les plans tangents à la surface d'équation $z^2=xy$ et contenant la droite (D) d'équations: $x=2$ et $y+z=1$.*

Solution de l'exercice:

Posons $f(x,y,z)=z^2-xy$ et (S) la surface d'équation $f(x,y,z)$. Soit $M=(x_0,y_0,z_0)\in(S)$. Le point M est un point régulier de (S) si et seulement si $\operatorname{grad}f(M)\neq\overrightarrow{0}$. Dans ce cas le plan tangent à (S) en M est orthogonal à $\operatorname{grad}f(M)=(-y_0,-x_0,2z_0)\neq(0,0,0)$ si $M\neq(0,0,0)$. Un point $P{=}(x,y,z)$ appartient au plan tangent si et seulement si $\overrightarrow{MP}\perp\operatorname{grad}f(M)\Leftrightarrow-y_0(x-x_0)-x_0(y-x_0)+2z_0(z-z_0)=0:(\Pi)$. Un point de la droite droite (D) : $\begin{cases}x=2\\z=-y-1\end{cases}$ est de la forme $P=(2,y,-y-1)$, $y\in\mathbb{R}$. Le plan (Π) contient (D) si et seulement si $\forall y\in\mathbb{R}$, $-y_0(2-x_0)-x_0(y-x_0)+2z_0(-y-1-z_0)=0$ soit $(-x_0-2z_0)y-2y_0+x_0y_0+x_0^2-2z_0-2z_0^2=0$. Ceci est réalisé si et seulement si $\begin{cases}-x_0-2z_0=0\\-2y_0+x_0y_0+x_0^2-2z_0-2z_0^2=0\\z_0^2=x_0y_0:M\in(S)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-2z_0\\z_0^2=-2z_0y_0\text{ soit }z_0(z_0+2y_0)=0\\-2y_0+x_0y_0+x_0^2-2z_0-2z_0^2=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x_0=-2z_0\\z_0=0\\y_0=0\end{cases}\begin{cases}x_0=-2z_0\\z_0=-2y_0\\-2y_0+4y_0^2+16y_0^2+4y_0-8y_0^2=0\end{cases}$ or $-2y_0+4y_0^2+16y_0^2+4y_0-8y_0^2=0\Leftrightarrow2y_0+12y_0^2=0\Leftrightarrow$ $y_0=0$ ou $y_0=-\dfrac{1}{6}$. Le point $(0,0,0)$ n'étant pas régulier, l'unique solution est le point $M=\left(-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right)$

Exercice 12 *Soit I un intervalle et $f : I \rightharpoonup \mathbb{R}$ une fonction convexe. On pose $C = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \;\; y > f(x)\}$. Montrer que C est convexe.*