Mercredi 11 juin 25

Exercice 1 *On dispose d'une urne contenant trois jetons indiscernables numérotés de 1 à 3.*
On effectue des tirages indépendants avec remise d'un seul jeton à la fois. On note :
- Y le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois dans l'ensemble des tirages réalisés deux numéros différents.
- Z le numéro du tirage pour lequel on a obtenu pour la première fois les trois numéros.

1. *Déterminer la loi de Y.*
2. *Identifier la loi de $Y-1$.*
3. *En déduire $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.*
4. *Déterminer la loi du couple (Y,Z).*
5. *En déduire la loi de Z ainsi que $\mathbb{E}(Z)$.*

Solution de l'exercice: 1: On a $Y(\Omega)\subset(\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\})\setminus\{1\}$ par construction.
Pour $k\geqslant 2$, en notant N_i le numéro du jeton obtenu au tirage i, on a $(Y=k)=\bigcup\limits_{1\leq a\leq 3}(N_1=a,\cdots,N_{k-1}=a,N_k\neq a)$
Ces évènements étant incompatibles et que les N_i sont indépendantes par hypothèse et suivent toutes la loi uniforme sur $[[1;3]]$, $\mathrm{\mathbb{P}(Y=k)=3\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}\left(N_i=a\right)\right)\mathbb{P}\left(N_{\mathit{k}}\neq b\right)}=\frac{6}{3^k}$.
On a $(\mathrm{Y}\neq+\infty)=\bigcup_{\mathrm{k}=2}^{+\infty}(\mathrm{Y}=\mathrm{k})$ (réunion incompatible) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(Y\neq+\infty)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{6}{3^k}=\frac{6}{9}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{3^{k-2}}=\frac{6}{9}\times\frac{1}{1-(1/3)}=1$. On en conclut que $\mathrm{\mathbb{P}(Y=+\infty)=0}$ (il est presque sûr d'arriver à avoir deux numéros différents).
2: D'après la question précédente, $(Y-1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall\mathrm{k}\in\mathbb{N}^*,\mathbb{P}(Y-1=k)=\frac{6}{3^{k+1}}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ donc $Y-1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.
3: Ainsi, d'après le cours et par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(Y-1)+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{V}(Y-1)=\frac{1-(2/3)}{(2/3)^2}=\frac{3}{4}$.
4 On a si $2\leq k<n$,
$(Y=k,Z=n)=\bigcup\limits_{1\leq a,b,c\leq 3\text{ et }a,b,c\text{ deux à deux distincts}}(N_1=a,\cdots,N_{k-1}=a,N_k=b,N_{k+1}\neq c,\ldots,N_{n-1}\neq c,N_n=c)$
Il y a 6 choix de (a,b,c) donc $P(Y=k,Z=n)=6\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-k-1}=\dfrac{2^{n-k}}{3^{n-1}}$
5 Par construction, $Z(\Omega)\subset(\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\})\setminus\{1,2\}$. Pour $n\geqslant 3,(Z=n)=\bigcup\limits_{m=2}^{n-1}(Y=m,Z=n)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(Z=n)=\sum\limits_{m=2}^{n-1}\frac{2^{n-m}}{3^{n-1}}=\sum\limits_{m=2}^{n-1}\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\frac{1}{2^{m-2}}=\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\times\frac{1-(1/2)^{n-2}}{1-(1/2)}=\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$.
On en déduit que $(Z\neq+\infty)=\bigcup\limits_{n=3}^{+\infty}(Z=n)$ donc $\mathbb{P}(Z\neq+\infty)=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}=\frac{4}{9}\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{2^{n-3}}{3^{n-3}}-\frac{2}{9}\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{3^{n-3}}$ donc $\mathbb{P}(Z\neq 0)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{1-(2/3)}-\frac{2}{9}\times\frac{1}{1-(1/3)}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$ donc $\mathbb{P}(Z=+\infty)=0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir les trois numéros).
$\sum\limits_{n=3}^{+\infty}n\mathbb{P}(Z=n)$ converge car, par croissances comparées, $n\mathbb{P}(Z=n)=n\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}=0\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $\mathbb{E}(Z)=\sum_{n=3}^{+\infty}n\mathbb{P}(Z=n)=\sum_{n=3}^{+\infty}n\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$. Or, pour tout $x\in\,]-1;1[\,,\sum\limits_{n=3}^{+\infty}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=3}^{+\infty}x^n\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1-x-x^2\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}-1-2x$ en dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence. En écrivant $\mathbb{E}(Z)=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2\sum_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, on a donc $\mathbb{E}(Z)=\frac{1}{(1-(2/3))^2}-1-2(2/3)-2\left(\frac{1}{(1-(1/3))^2}-1-2(1/3)\right)=\frac{11}{2}$.

Exercice 2 *On pose* $u_n(x) = \dfrac{1}{(1+nx)^2}$ *et* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. *Montrer que* S *est définie et de classe* C^∞ *sur* $]0,+\infty[$.

Solution de l'exercice: Soit $a > 0$.
Appliquons le théorème de dérivation terme à terme version C^∞ sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
(H_1) : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est C^∞ sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
(H_2) : On a $u_n(x) = \dfrac{1}{(1+nx)^2} = (1+nx)^{-2}$ donc $u_n'(x) = -2n(1+nx)^{-3}$.

Par récurrence immédiate, $u_n^{(k)}(x) = (-1)^k (k+1)! n^k (1+nx)^{-(k+2)} = \dfrac{(-1)^k (k+1)! n^k}{(1+nx)^{k+2}}$

Or si $x \geq a$ alors $\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq \dfrac{(k+1)! n^k}{(1+na)^{k+2}} \leq (k+1)! \dfrac{n^k}{(1+na)^{k+2}}$.

Donc $\|u_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leq (k+1)! \dfrac{n^k}{(1+na)^{k+2}} \leq \dfrac{(k+1)!}{a^{k+2} n^2}$ donc par comparaison de SATP, $\sum \|u_n\|_\infty^{[a,+\infty[}$ converge.

On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$ quelconque donc S est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
(la convergence uniforme entraînant la convergence siimple, inutile de reprendre la convergence simple)

Exercice 3 *Soit* a *et* b *deux réels strictement positifs. On pose* $I = \int_0^1 \dfrac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$.

1. *Montrer que* I *existe.*
2. *Justifier la convergence de la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{a+nb}$
3. *Montrer que* $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{a+kb}$.

Solution de l'exercice:
1: si $a \geq 1$, $x \mapsto \dfrac{x^{a-1}}{1+x^b}$ est continue sur $[0,1]$
sinon $x \mapsto \dfrac{x^{a-1}}{1+x^b}$ est continue sur $]0,1]$ et $\dfrac{x^{a-1}}{1+x^b} \underset{x\to 0}{\sim} x^{a-1} = \dfrac{1}{x^{1-a}} > 0$. Or $a > 0$ donc $1-a < 1$ donc, par comparaison d'intégrale généralisée, I converge.
2
3: Si $x \in]0,1[$, $\dfrac{x^{a-1}}{1+x^b} = x^{a-1} \dfrac{1}{1+x^b} = x^{a-1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{nb} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = (-1)^n x^{nb+a-1}$.
On commence par remarquer que $\int_0^1 |u_n(x)| = \dfrac{1}{a+nb}$ et la série $\sum \dfrac{1}{a+nb}$ diverge donc on ne peut pas appliquer le th d'interversion série intégrale sur un intervelle quelconque
On va appliquer le th de convergence dominée à $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$;
Vérifions l'hypothèse de domination: $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x) = x^{a-1} \dfrac{1-(-x^b)}{1+x^b}$ donc par inégalité triangulaire, $|f_n(x)| \leq x^{a-1} \dfrac{2}{1+x^b} = \varphi(t)$ et φ est intégrable.
Les autres hypothèses sont aussi vérifiées.
On en déduit $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.
D'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \dfrac{x^{a-1}}{1+x^b} dx$ donc $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx = I$ et

$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k(x)\,dx = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(\dddot{-}1)^k}{a+kb}$.par linéarité de l'intégrale donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(\dddot{-}1)^k}{a+kb}$ CQFD.

Exercice 4 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

1. *Montrer que si $x > 0$ alors $\sum u_n(x)$ converge.*
2. *Montrer que $f : x \mapsto -\ln(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Justifier que f est convexe.*
3. *Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x) \\ f \text{ est convexe} \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

4. *Montrer que, pour $x > 0$, on a*

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Solution de l'exercice:

1 Pour $x>0$,Par un DL avec reste en $\mathrm{O}(u^2)$ de $\ln(1+u)$, on obtient que $u_n(x) = \mathrm{O}(1/n^2)$ donc la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.

2: La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Par monotonie, pour tout $x \in [a;b]$

$$|u_n'(x)| \leq |u_n'(a)| + |u_n'(b)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il y a donc convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. La fonction somme de $\sum u_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction f l'est aussi par opérations.

3 La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est immédiat que $f(1)$ est nul et, pour tout $x>0$, on a après téléscopage

$$f'(x+1) - f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{x}$$

donc il existe un réel λ tel que pour tout $x>0$, $f(x+1) - f(x) = \ln(x) + \lambda$. Or

$$f(2) - f(1) = f(2) = -\ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

$$= -\ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}(2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)) = 0 \text{ (par téléscopage)}$$

Ainsi, on peut affirmer $f(x+1)-f(x)=\ln(x)$ et f est convexe d'après 2.
Unicité: soit g une autre fonction vérifiant les conditions proposées. Etudions la fonction $h=f-g$.
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$, 1-périodique et prend la valeur 0 en 1.
Nous allons montrer qu'elle est constante en observant que sa dérivée est nulle. Pour $x>0$, on a par croissance des dérivées de f et de g

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)\leq f'(\lfloor x\rfloor+1)-g'(\lfloor x\rfloor)=\frac{1}{\lfloor x\rfloor}+h'(\lfloor x\rfloor)$$

et parallèlement

$$h'(x)\geq h'(\lfloor x\rfloor)-\frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$

La fonction h' est 1-périodique, les valeurs $h'(\lfloor x\rfloor)$ sont donc constantes égales à C.
En passant à la limite quand $x\to+\infty$ l'encadrement

$$C-\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\leq h'(x)\leq C+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$

on obtient que la fonction h' présente une limite en $+\infty$. Puisque h' est périodique cette fonction est constante et, puisque la fonction h est périodique, la fonction h' est constante égale à 0 .
4: Basé sur des exos faits en cours:
On reconnaît en premier membre la fonction Γ dont on a vu (exo de cours) qu'elle est deux fois dérivable avec pour $k\in[[1,2]]$

$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln(t))^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On sait aussi $\Gamma>0,\Gamma(1)=1$ et $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. (vu aussi en cours)
Considérons alors $f(x)=\ln(\Gamma(x))$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(x+1)-f(x)=\ln(x), f(1)=0$ et f convexe car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(\Gamma'(x))^2\leq\Gamma(x)\Gamma''(x)$$

ce qui conduit à $f''\geq 0$.
On peut donc affirmer

$$\Gamma(x)=\mathrm{e}^{f(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\prod_{k=1}^n\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

et l'on peut conclure sachant $n+1$ équivalent à n.

Exercice 5 *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la même loi et mutuellement indépendantes. Soit également N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des X_k. On pose :*

$$Y=\sum_{k=1}^N X_k$$

1. *Etude numérique d'un cas particulier.*
   (a) *Définir une fonction Python permettant de calculer Y pour $X_1\sim\mathcal{B}(50,1/50)$ et $N\sim\mathcal{P}(1/12)$.*
   (b) *Réaliser une série de 1000 expériences et donner la moyenne et l'écart-type de Y.*
2. *On se replace dans le cas général. Soit $t\in[-1,1]$*
   (a) *Justifier que la famille $\left(P(Y=k;N=n)t^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.*

(b) *En déduire une expression de $G_Y(t)$ en fonction de $G_{X_1}(t)$ et $G_N(t)$.*

(c) *En déduire $E(Y)$.*

(d) *Déterminer $E(Y)$ pour $N \sim \mathcal{P}(m)$ et $X_1 \sim \mathcal{B}(n,p)$.*

3. *Dans une entreprise de 50 employés, soit Y la variable aléatoire indiquant le nombre de blessés dans une période τ, N indiquant le nombre d'accidents dans cette période et X_1 le nombre de blessés par accident. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{B}(50, 1/50)$ et $N \sim \mathcal{P}(1/12)$.*

   (a) *Quel est le nombre moyen de blessés durant la période τ ?*

   (b) *Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un blessé?*

   (c) *Déterminer la variance de Y.*

Solution de l'exercice:

1 a.

```
def Y():
    import numpy.random as rd
    N = rd.poisson (1/12,1)
    Y = sum( rd.binomial(50,1/50,N) )
    return Y
```

b. On réalise 1000 fois l'expérience et on estime l'espérance et l'écart-type :

```
Ys = [Y() for _ in range(1000)]
m = sum(Ys)/1000
s = sqrt( sum([y**2 for y in Ys])/1000 - m**2)
m , s
Out[4]:(0.084, 0.41102797958289894)
```

2 a. Pour tout $t \in [-1,1]$ Or $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|P(Y=k;N=n)| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}P(Y=k) = 1$ (sommation par paquets de famille positives) donc la famille $\left(P(Y=k;N=n)t^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable

et $|P(Y=k;N=n)t^n| \leq |P(Y=k;N=n)|$ donc la famille $\left(P(Y=k;N=n)t^k\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

2b:

$$\begin{aligned}
G_Y(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k)t^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=k;N=n)\right)t^k \quad \text{(probabilités totales)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_Y(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(X_1+\cdots+X_n=k;N=n\right)t^k\right) \quad \text{(sommation par paquets des familles sommables)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(X_1+\cdots+X_n=k\right)P(N=n)t^k\right) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(G_{X_1+\cdots+X_n}(t)\right)P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(G_{X_1}\right)^n(t)P(N=n) \quad \text{(par indépendance et identique distribution des } X_i) \\
&= G_N\left(G_{X_1}(t)\right)
\end{aligned}$$

Donc $G_Y = G_N \circ G_{X_1}$.
2c. Si N et les X_i admettent des espérances, leurs fonction génératrices sont dérivables en 1 et on a $E(N) = G_N'(1)$ et $E(X_1) = G_{X_1}'(1)$.
Alors la composition $G_N \circ G_{X_1}$ est également dérivable en 1 et donc Y admet une espérance :

$$E(Y) = G_Y'(1) = G_N'(G_{X_1}(1)) \cdot G_{X_1}'(1) = G_N'(1) \cdot G_{X_1}'(1) = E(N) \cdot E(X_1)$$

Formule au demeurant assez naturelle : on a en moyenne $E(N)$ termes dans la somme, et chacun de ces termes vaut en moyenne $E(X_1)$.
(remarque au passage : en proba, on fait le malin en mettant son intuition en avant APRES avoir fait le calcul soigneusement)
c. A-t-on déjà vu une question aussi facile??

$$E(Y) = E(N) \cdot E(X_1) = mnp$$

On s'empresse alors de vérifier la cohérence de ce qui précède en confrontant cette valeur théorique à l'estimation obtenue avec Python pour $m = 1/12, n = 50$ et $p = 1/50$:

```
In [5]: 1/12
Out[5]: 0.08333333333333333
```

3 a. Ce qui précède s'applique $E(Y) = E(N)E(X_1) = (1/12) \times 50 \times (1/50) = 1/12$.
b. C'est $1 - P(Y = 0)$, qu'on va calculer avec la fonction génératrice (la formule des probabilités totales ferait tout aussi bien l'affaire ici). Notons $\lambda = 1/12, n = 50$ et $p = 1/50$.

$$\begin{aligned} P(Y &= 0) = G_Y(0) \\ &= G_N(G_{X_1}(0)) \\ &= G_N(P(X_1 = 0)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} P(X_1 = 0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (1-p)^{nk} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{[(1-p)^n \lambda]^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{(1-p)^n \lambda} \\ &= e^{-(1-(1-p)^n)\lambda} \end{aligned}$$

Et donc la probabilité cherchée est :

$$1 - e^{-\left(1-(49/50)^{50}\right)1/12} \simeq 0.05160657732263041$$

c. Puisque N et X_1 admettent des variances, leurs fonctions génératrices sont deux fois dérivables en 1, et donc celle de Y aussi, ce qui permet de calculer $E(Y(Y-1))$:

$$G_Y''(t) = \left(G_N'(G_{X_1}(t)) \cdot G_{X_1}'(t)\right)' = G_N''(G_{X_1}(t)) \left[G_{X_1}'(t)\right]^2 + G_N'(G_{X_1}(t)) \cdot G_{X_1}''(t)$$

Et donc :

$$\begin{aligned} E(Y(Y-1)) &= G_Y''(1) \\ &= G_N''(1) \left[G_{X_1}'(1)\right]^2 + G_N'(G_{X_1}(1)) \cdot G_{X_1}''(1) \\ &= E(N(N-1)) \left[E(X_1)\right]^2 + E(N) \cdot E(X_1(X_1-1)) \\ &= \lambda^2 (np)^2 + \lambda \left(np(1-p) + (np)^2 - np\right) \end{aligned}$$

Et donc :

$$V(Y) = E(Y(Y-1)) + E(Y) - E(Y)^2 = \lambda^2(np)^2 + \lambda\left(np(1-p) + (np)^2 - np\right) + \lambda np - (\lambda np)^2 = \lambda np(1+(n-1)p)$$

Vérifions ce résultat en le confrontant à l'écart-type empirique obtenu avec Python :

```
In [6]: sqrt((1+49/50)/12)
Out[6]: 0.406201920231798\bigskip
```

Exercice 6 *Mines ponts*
Soit $E = C^\infty([0;1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $T(f) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

1. *Montrer que T définit un endomorphisme de E.*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*, x \in [0;1]$ et $f \in E$, donner une expression de $T^n(f)(x)$ sous forme de somme.*
3. *Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(0)$.*
4. *Trouver de même, pour $x \in [0;1]$, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x)$.*
5. *Montrer que 1 est valeur propre de T et déterminer $E_1(T)$.*
6. *Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$, est-ce que k peut être valeur propre de T ?*
7. *Pour $f \in E$, calculer $(T(f))'$. Déterminer $E_{1/2}(T)$*

Solution de l'exercice:
1: Si $f \in E$, par opérations, comme $x \mapsto \frac{x}{2}$ et $x \mapsto \frac{x+1}{2}$ sont de classe C^∞ de $[0;1]$ dans $[0;1]$, la fonction $T(f)$ est bien définie et de classe C^∞ sur $[0;1]$ donc $T(f) \in E$. Pour $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule $\forall x \in [0;1], T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{2}\left((\lambda f+g)\left(\frac{x}{2}\right) + (\lambda f+g)\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \frac{\lambda}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$ ce qui donne $T(\lambda f+g)(x) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$ donc $T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$: T est en endomorphisme de E.
2: Pour $f \in E$ et $x \in [0;1], T^2(f)(x) = T(T(f))(x) = \frac{1}{2}\left(T(f)\left(\frac{x}{2}\right) + T(f)\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$ et, par définition de $T(f)$, on a $T^2(f)(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{4}\right) + f\left(\frac{x+1}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+2}{4}\right) + f\left(\frac{x+3}{4}\right)\right)\right)$ ce qui donne l'initialisation suivante : $T^2(f)(x) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{4}\right) + f\left(\frac{x+1}{4}\right) + f\left(\frac{x+2}{4}\right) + f\left(\frac{x+3}{4}\right)\right)$.
Soit $n \geqslant 1$ tel que $\forall f \in E, \forall x \in [0;1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$. Par définition, comme $T^{n+1} = T^n \circ T$, on obtient $T^{n+1}(f)(x) = T^n(T(f))(x) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} T(f)\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$ par hypothèse de récurrence puis, par définition de $T, T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1}\left(f\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right)$. En posant $j = k+2^n$ dans le seconde somme, on a $\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x+j}{2^{n+1}}\right)$ donc, en changeant j en k et en regroupant les deux sommes, on arrive bien à $T^{n+1}(f)(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right)$.
Par principe de récurrence, $\forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], T^n(f)(x) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$, cette formule étant même valable quand $n = 0$ car $T^0(f)(x) = f(x) = \frac{1}{2^0}\sum_{k=0}^{2^0-1} f\left(\frac{x+k}{2^0}\right)$ puisque $T^0 = \mathrm{id}_E$.
3.Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de Riemann $R_n(f) = \frac{1-0}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(0 + k\frac{1-0}{n}\right)$ associée à $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue. D'après un théorème du cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$. D'après Q2., $T^n(f)(0) = R_{2^n}(f)$. Comme $(R_{2^n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$

est une suite extraite de $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(0) = \int_0^1 f(t)dt$.

Pour $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}, T^n(f)(x) - T^n(f)(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \left(f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)\right)$ donc, par inégalité triangulaire, $|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \left|f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|$. Or, par inégalité des accroissements finis, en posant $M = \|f'\|_{\infty,[0;1]}$ qui existe puisque la fonction f' est continue sur le segment $[0;1]$ d'après le théorème des bornes atteintes, on a $\left|f\left(\frac{x+k}{2^n}\right) - f\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{Mx}{2^n}$. Ainsi, $|T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| \leqslant \frac{2^n Mx}{2^{2n}} \leqslant \frac{M}{2^n}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (T^n(f)(x) - T^n(f)(0)) = 0$ dont on déduit que $\forall x \in [0;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt$ en écrivant $T^n(f)(x) = (T^n(f)(x) - T^n(f)(0)) + T^n(f)(0)$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction constante $c : x \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ sur $[0;1]$.
Remarque (non demandé): Avec ce qui précède,
$|T^n(f)(x) - c(x)| = |T^n(f)(x) - T^n(f)(0) + T^n(f)(0) - c(x)| \leqslant |T^n(f)(x) - T^n(f)(0)| + |T^n(f)(0) - c(x)|$
donc $|T^n(f)(x) - c(x)| \leqslant \frac{M}{2^n} + \left|T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t)dt\right|$. Ainsi,
$\|T^n(f) - c\|_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{M}{2^n} + \left|T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t)dt\right|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{M}{2^n} + \left|T^n(f)(0) - \int_0^1 f(t)dt\right|\right) = 0$ donc $(T^n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers c sur $[0;1]$.
4. Si 1 est la fonction constante égale à 1 sur $[0;1], T(1) = 1$ donc, comme $1 \neq 0, 1$ est valeur propre de T. Soit $f \in E_1(T)$, alors $T(f) = f$ donc, par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N}, T^n(f) = f$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n\to+\infty} T^n(f)(x) = \int_0^1 f(t)dt$ ce qui prouve que f est constante. Ainsi, $E_1(T) = \text{Vect}(1)$.
5 Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $|k| > 1$. Supposons qu'il existe $f \in E$ telle que $T(f) = kf$. Par une autre récurrence simple, pour $x \in [0;1]$, il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n(f) = k^n f(x)$. Comme $(T^n(f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après 4. et que $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ceci impose que $f(x) = 0$. On en déduit que k n'est pas valeur propre de f si $|k| > 1$.
Remarque: Par le même argument, comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on en déduit aussi que $E_1(T) = \{0\}$ donc que -1 n'est pas valeur propre de T.
6. Pour $f \in E$ et $x \in [0;1]$, on a $T(f)'(x) = \frac{1}{4}\left(f'\left(\frac{x}{2}\right) + f'\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \frac{T(f')(x)}{2}$ donc $T(f)' = \frac{T(f')}{2}$. Soit $f \in E_{1/2}(T)$, alors $T(f) = \frac{f}{2}$ donc $\frac{f'}{2} = T(f)' = \frac{T(f')}{2}$ et $T(f') = f'$ ce qui, d'après 4., montre que f' est constante. Ainsi, f est une fonction affine. Réciproquement, si on pose $f : x \mapsto ax + b$, alors $f \in E$ et $\forall x \in [0;1], \begin{cases} T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(a\frac{x}{2} + b + a\frac{x+1}{2} + b\right) = \frac{ax}{2} + \frac{a}{4} + b \\ \qquad T(f)(x) = \frac{f(x)}{2} = \frac{ax+b}{2} \end{cases}$
Deux fonctions polynômes prennnent les mêmes valeurs en un infinité de points ssi les polynômes sont égaux donc $T(f) = \frac{f}{2}$ si et seulement si $a + 2b = 0$ soit $f(x) = b(1 - 2x)$. Ainsi, $E_{1/2}(T) = \text{Vect}(g)$ avec $g : x \mapsto 1 - 2x$ et $\frac{1}{2} \in Sp(T)$.