TD 3 centrale 2 énoncés complets

Exercice 1 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $A_n(x) = y$. On note $f_n(y)$ cette unique solution.
2. Ecrire une fonction Python qui prend en argument n et x et qui renvoie $A_n(x)$.
3. Utiliser la fonction `fsolve` pour obtenir $f_n(y)$.
4. Tracer, pour différentes valeurs de y , les valeurs $(f_n(y))_{n \leq 100}$.
5. Soit $y \in \mathbb{R}^+$. Montrer que la suite $(f_n(y))_n$ converge et que sa limite l appartient à $[0, 1[$.
6. Soit $y \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite de la suite $(f_n(y))_n$.
7. Reprendre cette question à l'aide du résultat de l'exercice suivant.

Solution de l'exercice:

1 La fonction A_n est un polynôme. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, et dérivable sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall x \geq 0, A'_n(x) = \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \geq 0$$

Donc A_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Comme de plus $A_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} A_n(x) = +\infty$, le théorème de la bijection strictement monotone et continue entraîne que A_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Et donc pour tout $y \in \mathbb{R}^+$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $A_n(x) = y$.

2 Question python

```
def A(n,x):
    s=0
    puiss =1
    for k in range (1,n+1):
        puiss *= x
        s += puiss/k
    return s
```

3 Question python

```
import scipy.optimize as resol
def fn(n, y):
    def A(x):
        return An(n,x)-y
    return resol.fsolve(A,1)
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
Y = [1,2,3,4]
```

```

couleurs = ['red', 'green', 'blue', 'cyan']
les_n = [n for n in range(1, 101)]
for k in range(len(Y)):
    y = Y[k]
    coul = couleurs[k]
    les_f = [f(n,y) for n in les_n]
    plt.plot(les_n,les_f,'o',color=coul,label='y='+str(y))
plt.legend()
plt.show()

```

5 Fixons un $y > 0$ et notons $u_n = f_n(y)$.

$$\begin{aligned}
 A_n(u_{n+1}) &= A_{n+1}(u_{n+1}) - \frac{u_{n+1}^{n+1}}{n+1} \\
 &\leq A_{n+1}(u_n) \\
 &\leq y \\
 &\leq A_n(u_n)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Et puisque la fonction A_n est croissante, il vient que $u_{n+1} \leq u_n$. Comme d'autre part on a $u_n \geq 0$, la suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Supposons que $\ell \geq 1$. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y = \sum_{k=1}^n \frac{u_n^k}{k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{l^k}{k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Ce qui est impossible du fait de la divergence de la série harmonique. Donc $\ell < 1$.

6 Commençons par donner une expression de la fonction $A_n(x)$:

$$\begin{aligned}
 A_n(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k dt \\
 &= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt \\
 &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt
 \end{aligned} \tag{2}$$

En particulier, en conservant la notation u_n de la question précédente,

$$y = A_n(u_n) = -\ln(1-u_n) - \int_0^{u_n} \frac{t^n}{1-t} dt$$

On peut alors majorer l'intégrale qui nous pourrit les calculs :

$$0 \leq \int_0^{u_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^{u_n} \frac{u_n^n}{1-u_n} dt = \frac{u_n^{n+1}}{1-u_n} \longrightarrow 0$$

(car à partir d'un certain rang on a $u_n \leq \frac{\ell+1}{2} < 1$)

On a donc :

$$-\ln(1-u_n) \longrightarrow y$$

donc $-\ln(1-l) = y$ donc $l = 1 - e^{-y}$.

7: On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l < 1$ donc il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n < \frac{1+l}{2} < 1$.

La série entière $-\sum \frac{x^k}{k}$ est de rayon 1 donc converge normalement donc uniformément sur $\left[0, \frac{1+l}{2}\right]$ donc la suite de fonctions (A_n) converge uniformément vers A sur $\left[0, \frac{1+l}{2}\right]$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(u_n) = A(l)$ donc $y = -\ln(1-l)$.

Exercice 2 On considère un intervalle I , une suite de fonctions continues (A_n) avec $A_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ et une suite (u_n) d'éléments de I qui converge vers $l \in I$.

1. Peut-on affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(u_n) = A(l)$?

2. Ajouter une hypothèse pour arriver au résultat.

Solution de l'exercice:

Si $A_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit:

- A_n est affine sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ avec $A_n(0) = 0$ et $A_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

- A_n est affine sur $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ avec $A_n\left(\frac{2}{n}\right) = 0$

- A_n est nulle sur $\left[\frac{2}{n}, +\infty\right[$

La suite de fonction (A_n) converge vers la fonction nulle:

- $A_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- si $x > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{1}{2n} < x$ donc si $n \geq n_0$, $A_n(x) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a $A_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq A(0)$

2: Supposons que la suite (A_n) converge uniformément vers A .

On a $|A_n(u_n) - A(l)| = |A_n(u_n) - A(u_n) - A(u_n) - A(l)| \leq |A_n(u_n) - A(u_n)| + |A(u_n) - A(l)|$.

Soit $\varepsilon > 0$.

La suite de fonction converge uniformément donc $\|A_n - A\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc il existe un rang n_0 à partir duquel

$$\|A_n - A\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

De plus A est continue en l donc $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - l| < \alpha \implies |A(x) - A(l)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ donc il existe un rang n_1 à partir duquel $|u_n - l| < \alpha$.

Si $n \geq \max(n_0, n_1)$ alors $|A_n(u_n) - A(l)| < 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ donc la suite $(A_n(u_n))$ converge vers $A(l)$.

Exercice 3 Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^{n-1} x \rfloor$.

On note T l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont tous les termes sont dans $\{0, 1, 2\}$.

Pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ élément de T , on pose

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

1. Montrer que la fonction σ est bien définie.

2. On définit deux éléments u et v de T par

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A l'aide de ces deux suites, étudier l'injectivité de σ .

3. Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer que $(t_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*} \in T$.

4. Ecrire une fonction en Python qui prend en entrée x et N et renvoie la somme partielle $\sum_{n=1}^N \frac{t_n(x)}{3^n}$.

5. Représenter graphiquement cette somme partielle pour $N = 100$. Que peut-on conjecturer?

6. Démontrer ce résultat.

Solution de l'exercice:

1: On a $0 \leq \frac{u_n}{3^n} \leq 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\frac{1}{3} < 1$ donc par comparaison de SATP, la série $\sum u_n$ converge.

2: On a $\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} = \frac{1}{3}$ et $\sigma(v) = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ donc σ n'est pas injective.

3: On a $3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$ et $-3 \times 3^{n-1} x \leq 3 \times \lfloor 3^{n-1} x \rfloor < -3 \times (3^{n-1} x - 1)$
 $-1 < t_n(x) < 3$. Or $t_n(x)$ est entier donc appartient à $\{0, 1, 2\}$.

4: et 5

```
def Stn(n ,x):
    S = 0
    B = 1
    for i in range(1, n+ 1):
        B*= 3
        S += (ma.floor(x*B) - 3*ma.floor(x*(B/3)))/B
    return S
T = np.arange(0, 0.99, 0.01)
F = np.array([Stn(t, x) for t in T])
plt.figure()
plt.plot(T, F)
plt.show()
```

Il semblerait que la suite de fonctions (S_n) converge simplement vers $x \mapsto x$.

6. Posons $S_n(x) = \sum_{n=1}^N \frac{t_n(x)}{3^n}$.

Montrons par récurrence sur n que $S_n(x) = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}$.

Pour $n = 1$: $t_1(x) = \lfloor 3x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^0 x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor$ car $x \in [0, 1[$ donc $S_1(x) = \frac{\lfloor 3x \rfloor}{3}$.

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n}$.

On a $S_{n+1}(x) = S_n(x) + \frac{\lfloor 3^{n+1} x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^n x \rfloor}{3^{n+1}} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} + \frac{\lfloor 3^{n+1} x \rfloor - 3 \times \lfloor 3^n x \rfloor}{3^{n+1}} = \frac{\lfloor 3^{n+1} x \rfloor}{3^{n+1}}$.

Or $3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3^n x$ donc $\frac{3^n x - 1}{3^n} < \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} < \frac{3^n x}{3^n}$ soit $x - \frac{1}{3^n} < S_n(x) \leq x$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = x$.

Exercice 4 Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M_u est combinaison linéaire de trois matrices indépendantes de u et dont l'une est le carré d'une l'autre.

2. Ecrire un programme qui renvoie M_u . Calculer $M_{7,-14,1} \times M_{1,2,3}$ et $M_{1,2,3} \times M_{7,-14,1}$.
3. Soit $\mathcal{E} = \{M_u, u \in \mathbb{R}^3\}$. Quelle est la structure de $\mathcal{E}$? Cet ensemble est-il stable par $\times$? La loi $\times$ est-elle commutative dans M ?
4. Montrer que M_u est semblable à
$$\begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}.$$
5. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M_u soit diagonalisable.
6. On pose $P_m = X^3 - X^2 + m$, avec $m \in \{-0, 1; 0; 0, 1; 0, 2\}$; tracer les courbes des différents polynômes P_m sur l'intervalle $[-1, \frac{3}{2}]$.
7. Trouver une condition nécessaire et suffisante. sur m pour que P_m admette trois racines réelles.
8. Soit $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$, $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a + b + c = 1\}$ et $T' = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a + b + c = -1\}$.
Montrer que M_u est une matrice orthogonale si et seulement si $u \in S \cap (T \cup T')$

Solution de l'exercice:

1: On a $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI_3 + bM + cM^2$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2 question python

```
def Mu(a,b,c):
    A = a*np.eye(3)
    B = b*np.array([[0, 1, 0], [0, 0, 1], [1, 0, 0]])
    C = c*np.array([[0, 0, 1], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])
    return A + B + C
A = Mu(7,-14,1)
B = Mu(1,2,3)
```

```
np.dot(A,B)
np.dot(B,A)\bigskip
```

Les deux matrices commutent et leur résultat est dans $\mathcal{E}$

3: On a $\mathcal{E} = \text{vect}(I_3, M, M^2)$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Version concrète: $(aI_3 + bM + cM^2) \times (a'I_3 + b'M + c'M^2) = aa'I_3 + (ab' + ba')M + (ac' + ca' + bb')M^2 + (bc' + cb')M^3 + cc'M^4$.

On remarque que $M^3 = I_3$ donc $M^4 = M$ et $(aI_3 + bM + cM^2) \times (a'I_3 + b'M + c'M^2)$

Version abstraite: $\mathcal{E} = \{P(M) \text{ avec } P \in \mathbb{R}_2[X]\}$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $M_1 = P(M)$ et $M_2 = Q(M)$. On a $M_1M_2 = P(M) \times Q(M) = PQ(M)$.

On vérifie que $M^3 = I_n$ donc en posant $P_0 = X^3 - 1$, $P_0(M) = 0$.

Soit $PQ = P_0 \times A + B$ la division euclidienne de PQ par P_0 . On a $\deg(B) < 3$ et

$M_1M_2 = PQ(M) = P_0(M) \times A(M) + B(M) = B(M) \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est stable par $\times$.

De plus $\times$ est commutative dans $\mathcal{E}$ car $M_1M_2 = PQ(M) = QP(M) = M_2M_1$ (le produit de polynômes est commutatif)

4: On suppose que $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel et de l'orientation usuelle.

On remarque $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $\det(M) = 1$ donc M est une matrice dans la base canonique d'une rotation r .

Soit θ , un angle de la rotation r . On a $\text{tr}(r) = \text{tr}(M) = 1 + 2 \cos(\theta) = 0$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que $\theta \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$.

Soit u_1 un vecteur unitaire de l'axe de r complété en un BOND $b = (u_1, u_2, u_3)$.

Posons $b' = (-u_1, u_3, u_2)$.

Si $mat_b(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ alors $mat_{b'}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{-\theta} \end{pmatrix}$ (voir cours: suivant le choix du vecteur unitaire de l'axe, on obtient deux angles opposés).

Donc il existe une base orthonormée $b_0 = (u_1, u_2, u_3)$ directe dans laquelle la matrice de r est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}$.

On a donc $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}$ avec $P = P_{bc \rightarrow b_0}$ où bc est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$P^{-1}M^2P = (P^{-1}MP)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(R_{\frac{2\pi}{3}}\right)^2 \end{pmatrix} \text{ (calcul par blocs)}$$

On en déduit $P^{-1}M_uP = P^{-1}(aI_3 + bM + cM^2)P = aI_3 + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}$, ce qui donne le résultat demandé.

5: Posons $N_u = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2}(b+c) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$.

On a $P^{-1}M_uP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_u \end{pmatrix} = mat_{b_0}(f)$ avec f canoniquement associée à M_u .

Supposons M_u diagonalisable donc f diagonalisable donc d'après le cours, l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace stable est diagonalisable.

Or $vect(u_2, u_3)$ est stable par f et l'endomorphisme induit a pour matrice N_u dans la base (u_2, u_3) .

On en déduit que N_u est diagonalisable.

Or $\chi_{N_u} = X^2 + (b - 2a + c)X + \left(\left(\frac{1}{2}b - a + \frac{1}{2}c\right)^2 + \frac{3}{4}(b - c)^2\right)$ est de discriminant

$$(b - 2a + c)^2 - 4 \left(\left(\frac{1}{2}b - a + \frac{1}{2}c\right)^2 + \frac{3}{4}(b - c)^2\right) = -3(b - c)^2$$

- Si $b \neq c$ alors $sp(N_u) = \emptyset$ donc N_u n'est pas diagonalisable donc M_u n'est pas diagonalisable.

- Si $b = c$ alors $P^{-1}M_uP$ est diagonale donc M_u est diagonalisable.

6: graphiques avec python (déjà vu)

7: On a $P'_n(x) = x(3x - 2)$ donc

P_n est s^t croissante sur $]-\infty, 0[$ et $\lim_{-\infty} P_n = -\infty$

P_n est s^t décroissante sur $]0, 2/3[$.

P_n est s^t croissante sur $]2/3, +\infty[$ et $\lim_{+\infty} P_n = +\infty$.

On en déduit (th de la bijection s^t monotone) que P_n admet trois racines réelles (distinctes) ssi $P_n(0) > 0$ et $P_n(2/3) < 0$ soit $m \in]0, (2/3)^2 - (2/3)^3[$.

8 En raisonnant sur les colonnes de M_u ,

$$M_u \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases} \text{ or } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \text{ donc } M_u \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ (a + b + c)^2 = 1 \end{cases}, \text{ ce qui permet de conclure.}$$