DM 1

Première partie, pour le 6 septembre 2025

Exercice:

Soit un réel a et f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si
la fonction $F : \left\{ \begin{array}{l} [a, +\infty[\rightharpoonup \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{array} \right.$ a une limite réelle en $+\infty$.
Dans le cas contraire, on dit que cette intégrale généralisée diverge.
Si l'intégrale généralisée converge alors le réel $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)$ est alors noté $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et appelé valeur de l'intégrale généralisée.

Q 1 *Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ *est divergente.*

Q 2 *Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *est convergente et donner la valeur de cette intégrale généralisée.*

Q 3 *Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt$ *est convergente et donner la valeur de cette intégrale généralisée.*

Q 4 *Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 5} dt$ *est convergente et donner la valeur de cette intégrale généralisée.*

Exercice:

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right)$.

Q 5 *Montrer que la série* $\sum u_n$ *converge.*

Soit x et y deux réels strictement positifs.

Q 6 *On suppose que* a, b *et* $a + b$ *sont des réel n'appartenant pas à* $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Exprimer* $\tan(a + b)$ *à l'aide de* $\tan(a)$ *et* $\tan(b)$.

Q 7 *Montrer que* $\arctan(x) - \arctan(y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Q 8 *En déduire que* $\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x - y}{1 + xy}\right)$.

Q 9 *A l'aide de la question précédente, exprimer la série* $\sum u_n$ *comme série téléscopique et en déduire la valeur de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Deuxième partie, pour le 8 septembre 2025

Problème:

Le but du problème est de déterminer des fonctions f vérifiant une équation faisant intervenir $f \circ f$.

On suppose que I est un intervalle et on note id_I la fonction identité de I : $\left\{ \begin{array}{l} I \to I \\ x \mapsto x \end{array} \right.$.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant (réciproque d'un théorème vu en première année):

Théorème 1 *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans J. Si f est bijective alors f est strictement monotone.*

Des solutions de l'équation $f \circ f = id$ pour une fonction de variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

Q 10 *Soit f une fonction de I dans I distincte de id_I vérifiant $f \circ f = id$.*
Montrer qu'il existe $(u, v) \in I^2$ vérifiant $u < v$ et $f(u) > f(v)$.

Q 11 *Déterminer les fonctions croissantes de I dans I vérifiant $f \circ f = id_I$.*

Q 12 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x + (-1)^{\lfloor x \rfloor}$. Déterminer $f \circ f$.*

Q 13 *Pour $x \in [0, 1]$, on pose $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Déterminer $f \circ f$.*

On suppose dans la suite que $I = [0, 1]$

Q 14 *Déterminer les fonctions affines définies sur I vérifiant $f \circ f = id_I$.*

Q 15 *Soit φ une bijection de I dans I. On suppose que $f \circ f = id_I$ et on pose $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Déterminer $g \circ g$.*

Q 16 *On suppose que $I = [0, 1]$. Déduire des deux questions précédentes de nouveaux exemples de fonctions $f : I \to I$ vérifiant $f \circ f = id_I$.*

Q 17 *A quelle condition sur le graphe d'une fonction $f : I \to I$ vérifie-t-elle $f \circ f = id_I$. Pour $I = [0, 1]$, tracer le graphe d'une telle fonction (essayez de faire un graphe qui ne correspond à aucune fonction connue).*

Remarque *Il existe donc "énormément" de fonctions vérifiant cette condition $f \circ f = id_I$.*

Equation $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$ pour une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Q 18 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$.*
Justifier que f est strictement monotone.

Q 19 *En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f \circ f = -id_{\mathbb{R}}$.*

Equation $f\circ f(x)=\dfrac{x}{2}+3$ pour une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant: $\forall x\in\mathbb{R},\ f\circ f(x)=\dfrac{x}{2}+3$ (condition (C)).

Q 20 *Montrer que* $\forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{f(x)}{2}+3=f\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$.

Q 21 *En déduire que* $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f'\left(\frac{x}{2}+3\right)$

Q 22 *Soit* $x\in\mathbb{R}$. *On pose* $\begin{cases} u_0=x \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+3 \end{cases}$. *Rappeler le nom de d'une telle suite.*

- *Justifier qu'il existe une et une seule valeur de* x *pour laquelle la suite* (u_n) *est elle constante (on note* x_0 *cette valeur).*
- *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *exprimer* u_n *en fonction de* n. *En déduire que la suite* (u_n) *converge et préciser sa limite.*

Q 23 *Montrer que* $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=f'(x_0)$. *En déduire que* f *est une fonction affine.*

Q 24 *Déterminer les fonctions affines de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant la condition* (C).

Q 25 *Conclure.*

Equation $f\circ f=id_E$ pour une fonction $f:E\to E$ où E est un ensemble fini (facultatif)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, E_n un ensemble fini de cardinal n. On note u_n le nombre d'applications f de E_n dans E_n vérifiant $f\circ f=id_{E_n}$ et v_n le nombre d'applications f de E_n dans E_n vérifiant $f\circ f=id_{E_n}$ n'admettant pas de points fixe (c'est-à-dire pour lesquels $\forall x\in E_n, f(x)\neq x$).

Q 26 *Déterminer* u_1, u_2, v_1 *et* v_2.

Q 27 *Soit* f *de* E_{n+2} *dans* E_{n+2} *vérifiant* $f\circ f=id_{E_{n+2}}$ *n'admettant pas de points fixe. Soit* $a\in E_{n+2}$ *et* $b=f(a)$. *Montrer que* $E_{n+2}\backslash\{a,b\}$ *est stable par* f.

Q 28 *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $v_{n+2}=(n+1)\,v_n$. *(on pourra considérer un élément* a *de* E_{n+2} *et discuter suivant la valeur de* $b=f(a)$*).*

Q 29 *En déduire la valeur de* v_n *lorsque* n *est impair.*

Q 30 *Donner une expression de* v_{2n} *en fonction de* n.

Q 31 *Montrer que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+2}=u_{n+1}+(n+1)\,u_n$ *(on adaptera le raisonnement de la question 28).*

Q 32 *Ecrire une fonction python de complexité* $O(n)$ *qui renvoie la liste* $[u_1,u_2,\ldots,u_n]$.

Soit f une application de E_n dans E_n vérifiant $f\circ f=id_{E_n}$. On note I_f l'ensemble des points fixes de f. On a donc $I_f=\{x\in E_n,\ f(x)=x\}$ et on pose $J_f=E_n\backslash I_f$.

Q 33 *Montrer que si* $x\in J_f$ *alors* $f(x)\in J_f$. *En déduire que* J_f *est de cardinal pair.*

Q 34 *Déduire des questions précédentes (en en particulier de la question 30) que* $u_n=\sum\limits_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2p}\dfrac{(2p)!}{2^p p!}$ *(on pourra considérer* $\tilde{f}:\begin{cases} J_f\mapsto J_f \\ x\mapsto f(x)\end{cases}$ *).*