Exercice 105 *(mines) Etudier la nature de la série* $\sum u_k$ *avec* $u_k = \dfrac{\cos(\ln(k))}{k}$.

Solution de l'exercice: Posons $\alpha_n = 1 + \left\lfloor e^{-\frac{\pi}{3}+2n\pi} \right\rfloor$ et $\beta_n = \left\lfloor e^{\frac{\pi}{3}+2n\pi} \right\rfloor$.
On a $\sum\limits_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k \geq \sum\limits_{k=\alpha_n}^{\beta_n} \dfrac{1}{2k} \geq \dfrac{\beta_n - \alpha_n + 1}{2} \geq \dfrac{1}{2} \dfrac{e^{\frac{\pi}{3}+2n\pi} - e^{-\frac{\pi}{3}+2n\pi}}{e^{\frac{\pi}{3}+2n\pi}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{3}}\right)$ donc on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k = 0$.
Si la série $\sum u_n$ convergeait, on aurait $\sum\limits_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k = S_{\beta_n} - S_{\alpha_n - 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$ donc $\sum u_n$ diverge.