DM 2 Pour le 15/7/25

Exercice 1: Méthode de l'isomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Première partie

Soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même défini par $\varphi(P) = XP' + P$.

1. Montrer que φ est linéaire et préciser sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que φ est un isomorphisme.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est solution de l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = Q(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $xy' + y = x^3 + x$ sur $]0, +\infty[$.

Deuxième partie: polynômes d'Hermite (généralise l'interpolation de Lagrange)

Soit φ l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans $\mathbb{R}^6$ par $\varphi(P) = (P(1), P'(1), P(2), P'(2), P''(2), P(3))$

1. Justifier que φ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe un et un seul $P \in \mathbb{R}_5[X]$ vérifiant $\begin{cases} P(1) = 9 \\ P'(1) = 8 \\ P(2) = 7 \\ P'(2) = 6 \\ P''(2) = 5 \\ P(3) = 4 \end{cases}$.
3. Généraliser le résultat (facultatif)
   (on pourra considérer $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n + 1$).

Remarque *Dans cet exercice, on commence par introduire un isomorphisme à l'aide duquel on montre qu'un certain problème admet une solution unique.*
Certains énoncés (plus délicats) demandent de prendre l'initiative d'introduire un endomorphisme pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution à un problème sans que cela soit précisé dans l'énoncé.

Exercice 2:

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$. et $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$.

1. On suppose que $a < b$. Etudier la nature de la série $\sum u_n$.
2. On suppose que $a > b$.
   (a) On suppose $a \leq 0$. Etudier la nature de la série $\sum u_n$.
   (b) On suppose $a > 0$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement seulement si $2a - b > 1$.

Problème:

Dans tout le problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels non nuls. On définit la suite (p_n) par: $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Lorsque la suite (p_n) converge, on note p sa limite.

Première partie

1. On suppose que $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Calculer p_n. Etudier la limite de la suite (p_n).
2. On considère $x \in]0, \pi[$ et on suppose dans cette question que $a_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
   (a) Justifier que $\sin\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right) \times p_{i+1} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^i}\right) \times p_i$.
   (b) En déduire que $p_n = \dfrac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n).
3. Prouver que si la suite (p_n) converge vers $p \neq 0$, alors la suite (a_n) converge vers 1. La réciproque de cette propriété est-elle vraie?
4. On suppose dans cette question que, pour tout n, $a_n \in]0, 1[$.
   (a) Montrer que la suite (p_n) converge vers un réel p.
   (b) On suppose que la suite (a_n) ne converge pas vers 1. Déterminer la valeur de p.
5. Dans cette question, $a_n > 0$ pour tout n. Montrer que la série $\sum \ln(a_n)$ converge si et seulement si la suite (p_n) converge vers un réel $p > 0$.
   Jusqu'à la fin du problème, on pose $a_n = 1 + u_n$.
6. On suppose que pour tout n, $u_n \geq 0$.
   (a) Montrer que la suite (p_n) converge vers un réel $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de la suite $\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{1}{k^\alpha}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
7. Dans cette question, on suppose que la série $\sum u_n$ converge mais on ne suppose plus $u_n \geq 0$.
   (a) Montrer que, si série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge vers $p \neq 0$ (on fera un développement limité).
   (b) Montrer que, si série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge vers $p = 0$.

Deuxième partie:

On suppose maintenant que pour tout n on a $1 + u_n \neq 0$ et on pose $v_n = \dfrac{u_n}{p_n}$.

1. Pour $n \geq 2$, exprimer v_n à l'aide de $\dfrac{1}{p_n}$ et $\dfrac{1}{p_{n-1}}$. En déduire une expression simple de $\sum_{k=2}^{n} v_k$.
2. On suppose $u_n \geq 0$. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum v_n$ converge.
3. Montrer, à l'aide d'une exemple, que la réciproque de la question précédente est fausse.

Exercice 1:

Première partie

1. On a $\varphi(\lambda P+\mu Q)=X(\lambda P+\mu Q)'+(\lambda P+\mu Q)=\lambda XP'+\mu XQ'+\lambda P+\mu Q=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$. φ est linéaire. On a, si $i\geq 1$, $\varphi(X^i)=X\times iX^{i-1}+X^i=(i+1)X^i$ (et c'est encore vrai pour $i=0$) donc la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la matrice diagonale $D=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&n+1\end{pmatrix}$.

2. La matrice D est diagonale donc triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc est inversible donc φ est un isomorphisme.

3. $P\in\mathbb{R}_n[X]$ est solution de l'équation différentielle $xy'(x)+y(x)=Q(x)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\varphi(P)=Q$. Or φ est un isomorphisme donc il existe un et un seul $P\in\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\varphi(P)=Q$ donc il existe un et un seul $P\in\mathbb{R}_n[X]$ solution de l'équation différentielle $xy'(x)+y(x)=Q(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4. L'équation $xy'+y=x^3+x$ sur $]0,+\infty[$ est linéaire.

   (a) $(H): xy'+y=0\Leftrightarrow y'+a(x)y=0$ avec $a(x)=\frac{1}{x}$ qui a pour primitive $x\mapsto A(x)$ avec $A(x)=\ln(x)$. Les solutions de (H) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions $x\mapsto\lambda e^{-A(x)}=\lambda e^{-\ln(x)}=\dfrac{\lambda}{x}$ où λ est un réel quelconque.

   (b) D'après Q3, l'équation $(E): xy'+y=x^3+x$ admet une solution polynômiale de degré inférieur ou égal à 3. Posons $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. On a $xP'(x)+P(x)=3ax^3+2bx^2+cx+ax^3+bx^2+cx+d=4ax^3+3bx^2+2cx+1d$. On en déduit que $x\mapsto\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x}{2}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et donc que l'ensemble est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ est l'ensemble des fonction $x\mapsto\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{\lambda}{x}$ où λ est un réel quelconque.

Deuxième partie

Soit φ l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans $\mathbb{R}^6$ par $\varphi(P)=(P(1),P'(1),P(2),P'(2),P''(2),P(3))$

1. La linéarité de φ résulte de la linéarité de la dérivation et de l'évaluation.
   De plus si $P\in\ker(\varphi)$ alors $\deg(P)\leq 5$ et
   P admet 1 comme racine de multiplicité au moins 2
   P admet 2 comme racine de multiplicité au moins 3 et
   P admet 3 comme racine de multiplicité au moins 1
   donc la somme des multiplicités des racines de P est au moins 6 donc $P=0$
   On en déduit que $\ker(\varphi)=\{0\}$.
   Or $\dim(\mathbb{R}_5[X])=\dim(\mathbb{R}^6)$ donc φ est un isomorphisme.

2. $P\in\mathbb{R}_5[X]$ vérifiant $\begin{cases}P(1)=9\\P'(1)=8\\P(2)=7\\P'(2)=6\\P''(2)=5\\P(3)=4\end{cases}.\Leftrightarrow\varphi(P)=(9,8,7,6,5,4)$.
   Or φ est un isomorphisme donc $\exists!P\in\mathbb{R}_5[X],\varphi(P)=(9,8,7,6,5,4)$ ce qui donne le résultat demandé.

3. Généraliser le résultat (facultatif)

Soit $(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in(\mathbb{N}^*)^k$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i=n+1$).

On peut montrer que pour tout $\left(b_1^0,\dots b_1^{\alpha_1-1},b_2^0,\dots b_2^{\alpha_1-1},\dots b_k^0,\dots b_k^{\alpha_k-1}\right)\in\mathbb{R}^{n+1}$ il existe un et un seul polynôme $P\in\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant:
$\forall i\in[[1,k]],\ \forall j\in[[0,\alpha_{k-1}]],\ P^{(j)}(x_i)=b_i^j$ en utilisant φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par
$\varphi(P)=\left(P^{(0)}(x_1),\dots P^{\alpha_1-1}(x_1),P^{(0)}(x_2),\dots P^{\alpha_2-1}(x_2),\dots,P^{(0)}(x_k),\dots P^{\alpha_k-1}(x_k)\right)$.
On montre de même que φ est un isomorphisme et on en déduit le résultat annoncé.

Exercice 2:

1. On suppose que $a<b$. On a donc alors $n^a=\underset{n\to+\infty}{o}\left(n^b\right)$ donc $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n n^b}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n n^b}=\dfrac{1}{n^b}>0$ donc $\sum u_n$ et $\sum\dfrac{1}{n^b}$ sont de même nature et convergent si et seulement si $b>1$.

2. On suppose que $a>b$.

   (a) On suppose $a\leq 0$. On a $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n n^b}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{n^a}\begin{cases}=(-1)^n & \text{si } a=0\\ \text{non borné si } a<0\end{cases}$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

   (b) On suppose $a>0$.
   On a $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n n^b}=\dfrac{(-1)^n}{n^a}\dfrac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{n^{a-b}}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{a-b}}=0$ donc en substituant dans $\dfrac{1}{1+x}=1-x+\underset{x\to0}{o}(x)$ on a
   $$u_n=\frac{(-1)^n}{n^a}\left(1-\frac{(-1)^n}{n^{a-b}}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{(a-b)}}\right)\right)=\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^a}}_{b_n}\underbrace{-\frac{1}{n^{2a-b}}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{2a-b}}\right)}_{c_n}.$$
   Comme $a>0$ la série $\sum b_n$ converge d'après le CSSA.
   On a $c_n\sim_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n^{2a-b}}>0$ donc la série $\sum c_n$ converge si et seulement si $2a+b>1$ donc la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $2a-b>1$.

Problème:

1. $p_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)$ d'où $p_n=\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-1}\times\dfrac{n+1}{n}=n+1$. La suite (p_n) a donc pour limite $+\infty$.

2. On considère $x\neq0$ et on suppose que $a_n=\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

   (a) On a $\sin\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right)p_{i+1}=\sin\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right)\prod\limits_{k=1}^{i+1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\sin\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right)\prod\limits_{k=1}^{i}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ or $\sin(a)\cos(a)=\frac{1}{2}\sin(2a)$ d'où $\sin\left(\frac{x}{2^{i+1}}\right)p_{i+1}=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^i}\right)p_i$.

   (b) De proche en proche, $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)p_n=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)p_{n-1}=\frac{1}{2^2}\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)p_{n-2}=\cdots=\frac{1}{2^{n-1}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)p_1$ doù $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)p_n=\frac{1}{2^{n-1}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2^n}\sin(x)$. D'où $p_n=\dfrac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

   (c) On a $\sin(t)\sim_{t\to0}t$ donc $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\sim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}$ doù $\dfrac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\sim_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_n)=\dfrac{\sin(x)}{x}$.

3. Pour $n \geq 2$, $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} a_k} = a_n$. la suite (p_n) converge vers $p \neq 0$ donc la la suite (p_{n+1}) converge aussi vers p donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{p_{n+1}}{p_n}\right) = 1$. La suite (a_n) converge donc vers 1. La réciproque de cette propriété est donc fausse: en prenant $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = 1$ mais on a vu que la suite (p_n) a pour limite $+\infty$.

4. $a_n \in]0, 1[$

   (a) On a $p_{n+1} = a_{n+1} p_n$ et $a_{n+1} \in]0, 1[$ donc $p_{n+1} < p_n$. La suite (p_n) est donc décroissante. Elle est aussi minorée par 0 donc elle converge.

   (b) La suite (a_n) ne converge pas vers 1 donc la suite (p_n) ne converge pas vers $p \neq 0$ d'après la question 3. Or la suite (p_n) converge d'après 4a donc elle converge vers $p = 0$.

5. Commençons par remarquer que $\ln(p_n) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(a_k)$. Sens réciproque: on suppose que la suite (p_n) converge vers un réel $p > 0$. La suite $\ln(p_n)$ converge vers $\ln(p)$ donc la suite $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(a_k)$ converge donc la série $\sum \ln(a_n)$ converge. Sens direct: idem en appliquant la fonction exp à $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(a_k)$.

6. D'après 5, la suite (p_n) converge vers un réel $p > 0$ si et seulement si la série $\sum \ln(a_n)$ converge. Or $\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) \sim_{n \to +\infty} u_n$ car la série $\sum \ln(a_n)$ converge donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(a_n) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$. Or $\sum a_n$ est une SATP donc la série $\sum \ln(a_n)$ converge.si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

7. on suppose que la série $\sum u_n$ converge.

   (a) On suppose que la série $\sum u_n^2$ converge. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$ donc $\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) = u_n + O(u_n^2)$. la série $\sum u_n^2$ est une SATP convergente donc la série $\sum O(u_n^2)$ est absolument convergente. Or la série $\sum u_n$ converge donc la série $\sum \ln(a_n)$ converge. On en déduit, d'après 5, que la suite (p_n) converge vers $p \neq 0$.

   (b) On suppose que la série $\sum u_n^2$ diverge. On a $\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2)$ donc $\ln(a_n) - u_n = -\frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2) \sim_{n \to +\infty} -\frac{1}{2}u_n^2$. La série $\sum -\frac{1}{2}u_n^2$ est une SATN divergente donc la série $\sum(\ln(a_n) - u_n)$ est une SATN divergente. Or $\ln(a_n) = u_n + (\ln(a_n) - u_n)$ et la série $\sum u_n$ converge donc la série $\sum(\ln(a_n))$ diverge. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(a_k) - u_k\right) = -\infty$ (SATN divergente) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(a_k)\right) = -\infty$. En reprenant le raisonnement 5b sens réciproque, on obtient que la suite (p_n) converge vers $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$.

Deuxième partie:

On suppose maintenant que pour tout n on a $1 + u_n \neq 0$ et on pose $v_n = \dfrac{u_n}{p_n}$.

1. On a $v_n = \dfrac{u_n}{p_n} = \dfrac{u_n}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + u_k)} = \dfrac{(1 + u_n) - 1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + u_k)} = \dfrac{1}{p_{n-1}} - \dfrac{1}{p_n}$. On a donc $\sum\limits_{k=2}^{n} v_k = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{p_{k-1}} - \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_n}$.

2. S $u_n \geq 0$ et la série $\sum u_n$ converge alors la suite (p_n) converge vers un réel $p > 0$ d'après Q6a de la première partie donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} v_k = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}$ donc la série $\sum v_n$ converge.

3. Prenons $u_n = \frac{1}{n}$. On a donc $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) = n + 1$ (cf QI1) et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} v_k = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2}$. La série $\sum v_n$ converge mais la série $\sum u_n = \sum \dfrac{1}{n}$ diverge.