PSI DS 1 (le mercredi 17 septembre 2025)

Le sujet comporte 4 pages

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Questions proches du cours

Cours1: Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ est absolument convergente.

Cours2: Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$ en la comparant avec une série de Riemann.

Cours 3: Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

Cours 4: Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Exercice 1

Pour $x \geq 2$, on pose $F(x) = \int_2^x \dfrac{1}{t \times \ln^2(t)} dt$.

Q 1 *Calculer $F(x)$.*

Q 2 *En déduire que l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{t \times \ln^2(t)} dt$ converge et préciser sa valeur.*

Exercice 2

Q 3 *Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Justifier que φ est dérivable et calculer $\varphi'(x)$. En déduire une expression simplifiée de $\varphi(x)$.*

Q 4 *Justifier que la série $\sum \frac{1}{1+n^2}$ est convergente.*

On pose, pour $n \geq 1$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$. On se propose de donner un équivalent de R_n en $+\infty$.

Q 5 *Montrer que si $p \geq n+2$ alors $\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2} \leq \int_n^p \frac{1}{1+t^2} dt$.*

Q 6 *En déduire que $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leq R_n \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n)$.*

Q 7 *Montrer que $R_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.*

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^\alpha}\right)$

Q 8 *On suppose $\alpha < \frac{1}{2}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.*

Q 9 *On suppose $\alpha > \frac{1}{2}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.*

Exercice 4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(k+1)(k+3)}$.

Q 10 *Exprimer w_n comme terme général du produit de Cauchy de deux séries.*

Q 11 *En déduire que la série $\sum w_n$ converge et déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.*

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 4. On suppose que $f^2 = 0$ et $rg(f) = 2$.

Q 12 *Justifier que* $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.

Q 13 *Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problème 1

On rappelle que les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $F_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\cosh(x))^n} \mathrm{d}x$.

Q 14 *Montrer que l'intégrale généralisé F_n est convergente.*

Q 15 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $v(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Justifier que u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Q 16 *En déduire que $F_2 = 1$.*

Q 17 *À l'aide du changement de variable* $u = e^x$*, montrer que* $F_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Q 18 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, montrer que* $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1} F_n$.

Q 19 *Étudier la monotonie de la suite* (F_n).

Q 20 *Justifier que la suite* $(nF_{n+1}F_n)$ *est constante.*

Q 21 *Déduire des questions précédentes que* $F_{n+1} \sim_{n\to+\infty} F_n$*, puis que* $F_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Q 22 *Exprimer* F_{2n+1} *en fonction de* $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier $n \geq 2$, soient $u_n = \ln\left(\dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right) \quad v_n = u_n + \dfrac{1}{2(n-1)}$ $(n \geq 2)$.

Q 23 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, calculer l'intégrale* $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \times \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

Q 24 *Montrer que les suites* $(u_n)_{n\geq 2}$ *et* $(v_n)_{n\geq 2}$ *sont adjacentes.*

Q 25 *En déduire la formule de* STIRLING *:* $n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi}\dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$.

Problème 2:

Première partie: Etude d'une fonction

On considère un réel $x > 0$.

Q 26 *Montrer que la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ *converge.*

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Q 27 *Justifier que* $0 \leq S(x) \leq \frac{1}{x}$.

Q 28 *Etablir l'égalité* $(\mathcal{E})$:

$$S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}$$

Etude de la fonction S:

Q 29 *On considère* $y > 0$*. Montrer que* $S(y) - S(x) = (x-y)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$.

Q 30 *En déduire le sens de variation de la fonction* S.

Q 31 *Soit* $a > 0$*. Montrer que la fonction* S *est lipschitzienne sur* $[a, +\infty[$
(c'est-à-dire qu'il existe un réel K *tel que pour tout* $(x,y) \in [a,+\infty[^2$*,* $|S(y) - S(x)| \leq K|y-x|$*).*

Q 32 *En déduire que la fonction* S *est continue sur* $]0, +\infty[$.

Q 33 *Montrer que* $S(x) \sim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.

Q 34 *Montrer que* $S(x) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x}$. *On pourra commencer par encadrer* $S(x)$ *en utilisant l'égalité* $(\mathcal{E})$.

Deuxième partie: Calcul de S(1), somme de la série harmonique alternée

On pose pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) = \dfrac{1}{1+t} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k$.

Q 35 *Montrer que* $|g_n(t)| \leq t^{n+1}$.

Q 36 *On pose* $u_n = \int_0^1 g_n(t)\,dt$. *Montrer que la suite* (u_n) *converge vers* 0.

Q 37 *En déduire que* $S(1) = \ln(2)$.

Q 38 *On pose* $S_n(1) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{(-1)^i}{i+1}$. *Donner un entier* n_0 *à partir duquel* $|\ln(2) - S_n(1)| \leq 10^{-2}$.

Q 39 *Montrer que* $S(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(2) + o_{x\to 0}(1)$.

Troisième partie: Réarrangement de la série harmonique alternée, réarrangement d'une série à termes positifs

Attention 1 *Le cours de MPSI sur les familles sommables n'est pas au programme de PSI et ne pourra pas être appliqué.*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{3n} = \dfrac{1}{2n+1}$, $v_{3n+1} = \dfrac{-1}{4n+2}$ et $v_{3n+2} = \dfrac{-1}{4n+4}$ et $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n} v_i$.

Q 40 *Montrer que la suite* (T_{3n+2}) *converge vers* $\dfrac{\ln(2)}{2}$.

Q 41 *En déduire que la série* $\sum v_n$ *converge et préciser sa somme.*

On considère une suite (a_n) de réels positifs et φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Q 42 *Montrer que si la série* $\sum a_n$ *converge alors la série* $\sum b_n$ *converge*

Q 43 *Montrer que la série* $\sum a_n$ *converge si et seulement si la série* $\sum b_n$ *converge et que si la série* $\sum a_n$ *converge alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Q 44 *Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose plus que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$*?*.

Correction du DS 1

Exercice 1

R 1 *On a* $F(x) = \int_2^x \dfrac{1}{t \times \ln^2(t)} dt = \int_2^x \dfrac{1}{\ln^2(t)} \dfrac{1}{t} dt = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \dfrac{1}{u^2} du = -\dfrac{1}{\ln(x)} + \dfrac{1}{\ln(2)}$.

R 2 *On a* $-\dfrac{1}{\ln(x)} + \dfrac{1}{\ln(2)} \underset{x\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{\ln(2)}$ *donc l'intégrale généralisée* $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{t \times \ln^2(t)} dt$ *converge et vaut* $\dfrac{1}{\ln(2)}$.

Exercice 2

R 3 *Soit* $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$*:* φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$.
La fonction φ *est donc constante sur* $]-\infty, 0[$ *et constante sur* $]0, +\infty[$.
Or $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\varphi(1) = -\dfrac{\pi}{2}$ *donc si* $x > 0$ *alors* $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$ *et si* $x < 0$ *alors* $\varphi(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

R 4 *On a* $\frac{1}{1+n^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$ *et la SATP* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge donc la série* $\sum \frac{1}{1+n^2}$ *est convergente.*

R 5 *Soit* $k \geq 1$ *et* $t \in [k-1, k]$*. On a* $1 + (k-1)^2 \leq 1 + t^2 \leq 1 + k^2$ *donc* $\dfrac{1}{1+k^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+(k-1)^2}$ *d'où*
$\dfrac{1}{1+k^2}(k-(k-1)) \leq \int_{k-1}^k \dfrac{1}{1+t^2} dt \leq \dfrac{1}{1+(k-1)^2}(k-(k-1))$ *soit* $\dfrac{1}{1+k^2} \leq \int_{k-1}^k \dfrac{1}{1+t^2} dt \leq \dfrac{1}{1+(k-1)^2}$.
En remplaçant k *par* $k+1$ *dans la deuxième inégalité, on obtient*
$\int_k^{k+1} \dfrac{1}{1+t^2} dt \leq \dfrac{1}{1+k^2}$ *donc* $\int_k^{k+1} \dfrac{1}{1+t^2} dt \leq \dfrac{1}{1+k^2} \leq \int_{k-1}^k \dfrac{1}{1+t^2} dt$ *donc*
$\sum\limits_{k=n+1}^{p} \int_k^{k+1} \dfrac{1}{1+t^2} dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \int_{k-1}^k \dfrac{1}{1+t^2} dt$ *d'où* $\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2} \leq \int_n^p \frac{1}{1+t^2} dt$.

R 6 *L'encadrement précédent équivaut à* $\arctan(p+1) - \arctan(n+1) \leq R_n \leq \arctan(p) - \arctan(n)$ *et*
$R_n = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2}$ *et* $\lim\limits_{p\to+\infty} \arctan(p+1) = \lim\limits_{p\to+\infty} \arctan(p) = \dfrac{\pi}{2}$ *donc, en passant à la limite,*
$\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leq R_n \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n)$.

R 7 *La première question de l'exercice permet d'en déduire que* $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq R_n \leq \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.
Or $\arctan(x) \sim_{x\to0} x$ *donc* $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ *et* $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ *donc* $R_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3

R 8 *Si* $\alpha < \dfrac{1}{2}$ *alors* $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ *donc* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^\alpha} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *et* $\sin(x) \sim_{x\to0} x$
donc $u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} > 0$*. La SATP* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *diverge donc* $\sum u_n$ *diverge.*

R 9 *Si* $\alpha > \dfrac{1}{2}$*, on a* $\sin(x) = x + O_{x\to 0}(x^3)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ *donc* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^\alpha} + O_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right)$ *car* $\dfrac{1}{n^\alpha} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge 'CSSA) et la série* $\sum O_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ *(comparaison avec Riemann)*

La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge ssi* $\alpha > 1$ *donc la série* $\sum u_n$ *converge ssi* $\alpha > 1$*.*

Exercice 4

R 10 *On a* $w_n = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k}{(k+1)(k+3)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^{n-k}} \times \dfrac{1}{(k+1)(k+3)}$.

Posons $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$ *et* $v_n = \dfrac{1}{2^n}$*, on a* $w_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$*.*

R 11 *On a* $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2} > 0$ *et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge donc la SATP* $\sum u_n$ *converge (donc absolument). De plus,* $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3}\right)$ *donc*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{3}{4}$$

La série $\sum u_n$ *converge absolument et a pour somme* $\dfrac{3}{4}$

La série $\sum v_n$ *(géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$*) converge absolument et a pour somme* $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$

donc (th sur le produit de Cauchy) la série $\sum w_n$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \dfrac{3}{4} \times 2 = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 4. On suppose que $f^2 = 0$ et $rg(f) = 2$.

R 12 *On a* $f^2 = 0$ *donc* $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ *(cours 4)*

Par le th du rang, $\dim\ker(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$ *donc* $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$

R 13 *Soit* (e_1, e_2) *une base de* $\ker(f)$*.*

On a $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ *donc* $\exists (e_3, e_4) \in E^2$ *tels que* $f(e_3) = e_1$ *et* $f(e_4) = e_2$*.*

Montrons que $(e_1, e_{2,} e_3, e_4)$ *est une base de E.*

Supposons $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0_E$*.*

En appliquant f on obtient, par linéarité $\lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_2 = 0_E$ *car* e_1 *et* e_2 *appartiennent à* $\ker(f)$*.*

Or (e_1, e_2) *est libre donc* $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ *d'où* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E$*. Or* (e_1, e_2) *est libre donc* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Donc $b = (e_1, e_{2,} e_3, e_4)$ *est une famille libre de* $4 = \dim(E)$ *éléments donc est une base de E et* $mat_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problème 1:

R 14 *On a* $\cosh(x) \geq 1$ *donc la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{(\cosh(x))^n}$ *est définie et continue sur* $[0, +\infty[$.

De plus, $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \sim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2}$ *donc* $\dfrac{1}{(\cosh(x))^n} \sim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{e^x}\right)^n = 2^n e^{-nx} \geq 0$ *et l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x$ *est convergente car* $n > 0$ *donc l'intégrale généralisé* F_n *est convergente.*

R 15 *La fonction* v *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *(th opérations) et*
$v'(x) = \dfrac{\cosh(x) \times \cosh(x) - \sinh(x) \times \sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.

R 16 *On en déduit que* $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{\cosh^2(x)}\mathrm{d}x = [v(x)]_0^X = \frac{\sinh(X)}{\cosh(X)} = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \sim_{x\to+\infty} \frac{e^X}{e^X}$
donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1}{\cosh^2(x)}\mathrm{d}x = 1$ *donc* $F_2 = 1$.

R 17 *On a* $\displaystyle F_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2e^x}{(e^x)^2 + 1}\mathrm{d}x$.
La fonction $x \mapsto e^x$ *est de classe* C^1, *strictement croissante et bijective de* $[0, +\infty[$ *sur* $[1, +\infty[$, *donc*

$$F_1 = \int_1^{+\infty} \frac{2}{u^2+1}\mathrm{d}u = [2\arctan(u)]_1^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

R 18 *Dans* $\displaystyle F_{n+2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\cosh(x))^{n+2}}\mathrm{d}x$, *effectuons l'intégration par parties avec*

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{(\cosh(x))^n}, \ u'(x) = \dfrac{-n\sinh(x)}{(\cosh(x))^{n+1}} \\ v(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \ v'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}. \end{cases}.$$

Les fonctions u *et* v *sont de classe* C^1 *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 1$ *(voir question précédente)*
On en déduit que $\displaystyle F_{n+2} = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{n\sinh(x)}{(\cosh(x))^{n+1}} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\mathrm{d}x$
donc $\displaystyle F_{n+2} = \int_0^{+\infty} \frac{n\sinh^2(x)}{(\cosh(x))^{n+2}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{n\left(\cosh^2(x) - 1\right)}{(\cosh(x))^{n+2}}\mathrm{d}x = n(F_n - F_{n+2})$.
On en déduit que $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$.

R 19 *On a pour* $x \geq 0$, $\cosh(x) \geq 1$ *donc* $\dfrac{1}{(\cosh(x))^{n+1}} \leq \dfrac{1}{(\cosh(x))^n}$ *donc par croissance de l'intégration* $F_{n+1} \leq F_n$ *donc*
$\boxed{(F_n) \text{ est décroissante.}}$

R 20 *On a* $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$ *donc* $(n+1)F_{n+2}F_{n+1} = nF_nF_{n+1}$ *donc la suite* (nF_nF_{n+1}) *est constante et vaut* $F_1F_2 = \dfrac{\pi}{2}$

R 21 *On a* $F_n > 0$ *(l'intégrale d'une fonction continue positive n'est nulle que si la fonction est nulle),*
donc $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{F_{n+2}}{F_n} \leq \dfrac{F_{n+1}}{F_n} \leq 1$. *Par* $\boxed{\text{théorème d'encadrement,}}$ *on en déduit que* $\boxed{F_{n+1} \sim_{n\to+\infty} F_n.}$.

Or $(n+1)F_{n+2}F_{n+1} = nF_nF_{n+1}$, *suite constante qui vaut* $F_1F_2 = \dfrac{\pi}{2}$ *(d'après les calculs précédents).*

D'où : $\dfrac{\pi}{2} = nF_{n+1}F_n \sim_{n\to+\infty} n(F_n)^2$, *comme* $F_n \geq 0$, *on en déduit que* $\boxed{F_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}.}$

R 22 *On a* $F_{2n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}F_{2n-1} = \dfrac{2n-1}{2n}\times\dfrac{2n-3}{2n-2}F_{2n-3} = \dfrac{2n-1}{2n}\times\dfrac{2n-3}{2n-2}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}F_1$
d'où $F_{2n+1} = \dfrac{(2n)!}{((2n)\times(2n-2)\times\cdots 2)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{(2^n\times n\times(n-1)\times\cdots\times 1)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\dfrac{\pi}{2}.$

R 23 *On a* $(x-n)(n+1-x) = -n^2-n+2nx+x-x^2$ *donc*
$I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} -\tfrac{1}{2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{x} - \frac{n(n+1)}{2x^2}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2} + \left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln(x) + \frac{n(n+1)}{2x}\right]_n^{n+1} = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1)-\ln n) - 1.$
Or si $x\in[n,n+1]$, *alors* $0\leq x-n\leq 1$ *et* $0\leq(n+1)-x\leq 1$ *et* $0 \leq \dfrac{1}{2x^2} \leq \dfrac{1}{2n^2}$
donc $0\leq(x-n)(n+1-x)\times\dfrac{1}{2x^2}\leq\dfrac{1}{2n^2}$ *et par* $\boxed{\text{croissance de l'intégration}}$ *:* $0\leq I_n\leq\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{2n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}.$

R 24 *Comme* $v_n - u_n = \dfrac{1}{2(n-1)}$, *il est clair que* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0.}$
De plus, $u_{n+1}-u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}}\right) - \ln\left(\dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right) = \ln\left(\dfrac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}\dfrac{n!}{(n+1)!}\dfrac{1}{e}\right)$ *donc*
$u_{n+1}-u_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = I_n \geq 0$ *d'après la question précédente. Donc* $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$
Et $\boxed{(v_n)\ \text{décroissante}}$ *car :* $v_{n+1}-v_n = u_{n+1}-u_n+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2(n-1)} = u_{n+1}-u_n-\dfrac{1}{2n\,(n-1)}\leq I_n-\dfrac{1}{2n^2}\leq 0$ *car* $\dfrac{1}{2n\,(n-1)}\geq\dfrac{1}{2n^2}.$

R 25 *D'après la question précédente,* (u_n) *[et* (v_n)*] converge vers une limite* ℓ_0, *donc* $e^{u_n}\to e^{\ell_0}=\ell\neq 0$, *soit* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = \ell\neq 0$ *donc*
$\boxed{n!\sim_{n\to+\infty}\dfrac{n^n\sqrt{n}}{\ell e^n}.}$
L'équivalent précédemement obtenu donne $\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}\sim_{n\to+\infty}F_{2n+1}$ *et*
$F_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sim_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{\frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{\ell e^{2n}}}{2^{2n}\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{\ell e^n}\right)^2} = \dfrac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}$. *D'où* $\boxed{\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$

I Problème2

R 26 *Posons* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. *On a* $(-1)^n a_n = \dfrac{1}{n+x} > 0$ *donc la série est alternée.*
De plus $|a_n| = \dfrac{1}{n+x}$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = 0$.
De plus $n\leq n+1$ *donc* $0 < n+x\leq n+1+x$ *donc* $|a_{n+1}|\leq|a_n|$. *La suite* $(|a_n|)$ *est décroissante donc d'après C.S.S.A, la série* $\sum a_n$ *converge.*

R 27 *Toujours d'après CSSA, la somme* $S(x)$ *est du signe de* u_0 *et vérifie* $|S(x)|\leq|a_0|$.
Or $a_0 = \frac{1}{x} > 0$ *donc* $0\leq S(x)\leq\frac{1}{x}$.

R 28 *Si* $x>0$, $S(x)+S(x+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \frac{1}{x}.$

R 29 *On a* $S(y)-S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+y}-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+y}-\dfrac{(-1)^n}{n+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(n+x-n-y)}{(n+x)(n+y)}$ *donc* $S(y)-S(x)=(x-y)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$.

R 30 *On montre de même que la série* $\sum\dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$ *est spéciale alternée donc* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$ *est du signe de son premier terme* $\dfrac{1}{xy}>0$.
Si $0<x<y$, *alors* $x-y<0$ *donc* $S(y)-S(x)<0$ *d'après la question précédente donc la fonction* S *est décroissante.*

R 31 *D'après ce qui précède,* $|S(y)-S(x)|=\left|(x-y)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}\right|$.
Pour $x\geq a$ *et* $y\geq a$, *par le CSSA,* $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}\right|\leq\left|\dfrac{1}{(0+x)(0+y)}\right|\leq\dfrac{1}{a^2}$ *donc*
$|S(y)-S(x)|\leq\dfrac{1}{a^2}|(x-y)|$.

R 32 *La fonction* S *est lipschitzienne sur* $[a,+\infty[$ *donc continue sur* $[a,+\infty[$ *avec* $a>0$ *quelconque donc* S *est continue sur* $]0,+\infty[$

R 33 *La fonction* S *est continue en* 1 *donc* $\lim\limits_{x\to0}S(x+1)=S(1)$ *et* $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ *donc* $S(x+1)=o_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Or $S(x)=\dfrac{1}{x}-S(x+1)$ *donc* $S(x)=\dfrac{1}{x}+o_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)\sim_{x\to0}\dfrac{1}{x}$.

R 34 *On sait que pour* $x>0$ *on a* $S(x)+S(x+1)=\dfrac{1}{x}$ *et la fonction* S *est décroissante donc* $S(x)>S(x+1)$ *donc* $S(x)+S(x+1)\leq2S(x)$ *donc* $S(x)\geq\dfrac{1}{2x}$. *Pour* $x>1$, $S(x-1)+S(x)=\dfrac{1}{x-1}$ *et* $S(x)\leq S(x-1)$ *donc* $S(x-1)+S(x)\geq2S(x)$ *donc* $S(x)\leq\dfrac{1}{2(x-1)}$ *donc* $\dfrac{1}{2x}\leq S(x)\leq\dfrac{1}{2(x-1)}$ *et* $\dfrac{1}{2(x-1)}\sim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}$ *donc* $S(x)\sim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}$ *en* $+\infty$.

R 35 *On a* $g_n(t)=\dfrac{1}{1+t}-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k t^k=g_n(t)=\dfrac{1}{1+t}-\sum\limits_{k=0}^{n}(-t)^k=\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$
donc $|g_n(t)|=\dfrac{t^{n+1}}{1+t}\leq t^{n+1}$ *car* $t\geq0$.

R 36 *On a* $|u_n|=\left|\int_0^1 g_n(t)\,dt\right|\leq\int_0^1|g_n(t)|\,dt\leq\int_0^1 t^{n+1}dt=\left[\dfrac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\dfrac{1}{n+2}$ *d'où* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

R 37 *Par ailleurs* $u_n=\int_0^1\dfrac{1}{1+t}dt-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^k dt=\ln(2)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$. *Or* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}=S(1)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ *donc* $S(1)=\ln(2)$.

R 38 *La série* $\sum\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ *est spéciale alternée (déjà vu) donc* $|\ln(2)-S_n(1)|\leq|a_{n+1}|$ *(notation de la première question pour* $x=1$*) donc* $|\ln(2)-S_n(1)|=\dfrac{1}{n+2}$
Si $n\geq98$ *alors* $|\ln(2)-S_n(1)|\leq10^{-2}$.

R 39 *On a* $S(x) = \dfrac{1}{x} - S(x+1)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} S(x+1) = S(1)$ *donc* $S(x+1) = S(1) + o_{x\to 0}(1)$ *donc* $S(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(2) + o_{x\to 0}(1)$.

R 40 *Posons* $u_n = v_{3n} + v_{3n+1} + v_{3n+2}$.
On a $u_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4} = \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}\right)$.
On a $T_{3n+2} = \sum\limits_{i=0}^{3n+2} v_{3n} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2i+1} - \dfrac{1}{2i+2}\right) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)^i}{i+1} = \dfrac{1}{2}S_{2n+1}(1) \to_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

R 41 *On a* $T_{3n} = T_{3n+2} - (v_{3n+1} + v_{3n+2})$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n} = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ *et de même* $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ *donc la suite* (T_n) *converge vers* $\dfrac{\ln(2)}{2}$ *(résultat analoque à celui pour la suite des termes d'indices pairs et impairs) donc la série* $\sum v_n$ *converge et a pour somme* $\dfrac{\ln(2)}{2}$

R 42 *Supposons que* $\sum a_n$ *converge et posons* $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ *et* $\sigma'_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)}$ *Si* $N = \max\{\varphi(i), i \in [[0,n]]\}$.
On a $\sigma'_n \leq \sigma_N \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *car* $a_n \geq 0$.
La suite (σ'_n) *est donc majorée donc* $\sum b_n$ *converge (et en passant à la limite,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$*).*

R 43 *On a* $a_n = b_{\varphi^{-1}(n)}$ *donc si* $\sum b_n$ *converge alors* $\sum a_n$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.
On en déduit que $\sum a_n$ *converge ssi* $\sum b_n$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

R 44 *On a* $v_{3n} = u_{2n}$, $v_{3n+1} = u_{4n+1}$ *et* $v_{3n+2} = u_{4n+3}$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(3n) = 2n$, $\varphi(3n+1) = 4n+1$ *et* $\varphi(3n+2) = 4n+3$. φ *est bijective car atteint tous les pairs et tous les impairs exactement une fois.*
On a $v_n = u_{\varphi(n)}$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *donc le résultat précédent ne subsiste pas si la série n'est pas à terme positifs.*