

Exercice 1: lien entre convergence de l'intégrale et existence de limite

On s'intéresse à la nature de l'intégrale généralisée $I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt$.

Q 1 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}} du$ converge.

Q 2 En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ converge.

Q 3 En déduire que l'intégrale généralisée I est convergente.

Q 4 La fonction $f : t \mapsto \cos(t^2)$ admet-elle une limite en $+\infty$.

Exercice 2: Forme d'une dérivée $n^{i\text{eme}}$

Soit $f : \begin{cases} \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$

Q 5 Justifier que f est de classe C^∞ . Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Q 6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.

Q 7 Préciser le degré de P_n .

Exercice 3:

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Q 8 Justifier, en utilisant le déterminant, que $f^2 \neq -\text{id}_E$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f^3 = -f$ et $f \neq 0$.

Q 9 Justifier que $\ker(f^2 + \text{id}_E) \neq \{0_E\}$.

Q 10 Justifier que si $a \in \ker(f^2 + \text{id}_E)$ et $a \neq 0$, alors $(a, f(a))$ est libre et $f(a) \in \ker(f^2 + \text{id}_E)$.

Q 11 En déduire que $\dim(\ker(f^2 + \text{id}_E)) = 2$

Q 12 Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \text{id}_E)$.

Q 13 Montrer que $\text{Im}(f) = \ker(f^2 + \text{id}_E)$.

Q 14 Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Q 15 *Préliminaire: Rappeler le théorème "limite de la dérivée"*

Première partie: Etude d'un exemple.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Q 16 *Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.*

Q 17 *Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.*

Q 18 *Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Q 19 *Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f''(x)$ pour $x \neq 0$.*

Q 20 *Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.*

Deuxième partie: Généralisation.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant $f(0) = 0$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Q 21 *Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.*

Q 22 *Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Q 23 *Justifier que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \neq 0, g^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

Q 24 *Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (on pourra raisonner par récurrence).*

Q 25 *Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.*

Remarque On verra dans le cours sur les séries entières qu'on peut obtenir ces résultats beaucoup plus rapidement pour certaines fonctions dites développables en série entière.

Exercice 1:

R 1 La fonction $f : u \mapsto \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

De plus, $0 \leq |f(u)| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{3/2}} du$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}} du$ converge.

R 2 Sous réserve de convergence, l'IPP avec $v'(u) = \cos(u)$ et $w(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du = \left[-\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} du.$$

Or $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} = 0$ car $\sin$ est bornée et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} du$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ converge.

R 3 La fonction $u : t \mapsto t^2$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.
Sous réserve de convergence, le changement de variable donne

$$I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{2t} 2t dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du \text{ qui converge donc } I \text{ converge.}$$

R 4 Posons $u_n = \sqrt{2n\pi}$ et $v_n = \sqrt{2n\pi + \pi}$. On a $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = -1$.

Si f admettait une limite l en $+\infty$, alors, par composition des limites, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = l$,
ce qui contredit ce qui précède donc la fonction f n'admet pas en $+\infty$.

Exercice 2: Forme d'une dérivée $n^{i\text{ème}}$

$$\text{Soit } f : \begin{cases}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

R 5 La fonction f est de classe C^∞ comme inverse de fonction C^∞ qui ne s'annule pas.

On obtient $f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = f'(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos^2(x)}$ et

$$f''(x) = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{2\sin^2(x)}{\cos^3(x)} = \frac{\cos^2(x) + 2\sin^2(x)}{\cos^3(x)} \text{ (début de la question suivante!)} = \frac{1 + \sin^2(x)}{\cos^3(x)}.$$

R 6 La relation est vraie pour $n = 0, 1, 2$ avec $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = 1 + X^2$ d'après la question précédente).

Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} = P_n(\sin(x)) \times (\cos^{(n+1)}(x))$.

On en déduit $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} = \cos(x) P'_n(\sin(x)) \times \frac{1}{\cos^{n+1}(x)} + P_n(\sin(x)) \times -(n+1)(-\sin(x)) (\cos^{(n+2)}(x))$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos^2(x) P'_n(\sin(x)) + (n+1) \sin(x) P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} = \frac{(1 - \sin^2(x)) P'_n(\sin(x)) + (n+1) \sin(x) P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}.$$

Si on pose $P_{n+1} = (1 - X^2) P'_n + (n+1) X P_n$, alors P_{n+1} est un polynôme et $f^{(n)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$.

R 7 Montrons que $\deg(P_n) = n$ par récurrence sur n .

C'est vrai pour $n = 0, 1, 2$.

Supposons que $\deg(P_n) = n$.

On a $\deg((1 - X^2) P'_n) = n + 1$ et $\deg((n+1) X P_n) = n + 1$.

Soit a_n le coefficient dominant de P_n . On a $(1 - X^2) P'_n = -na_n X^{n+1} + Q_n$ et $(n+1) X P_n, P_{n+1} = (n+1) a_n X^{n+1} + R_n$ avec $\deg(Q_n) \leq n$ et $\deg(R_n) \leq n$ donc $P_{n+1} = a_n X^{n+1} + Q_n + R_n$ donc $\deg(P_{n+1}) = n + 1$ et P_n et P_{n+1} ont même coefficient dominant (qui vaut donc 1).

Exercice 3

R 8 Supposons $f^2 = -id_E$. On en déduit que $\det(f^2) = \det(-id_E) = (-1)^3$. Or $\det(f^2) = \det(f)^2$ donc $\det(f)^2 = -1$ absurde car $\det(f) \in \mathbb{R}$.

R 9 Si $\ker(f^2 + id_E) = \{0_E\}$, alors $f^2 + id_E$ est injectif donc bijectif (endo + dim finie) et $f^3 = -f$ donc $f^3 + f = 0 = (f^2 + id_E) \circ f$. En composant par $(f^2 + id_E)^{-1}$ à gauche, on obtiendrait $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse donc $\ker(f^2 + id_E) \neq \{0_E\}$.

R 10 Si $(a, f(a))$ est liée, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $f(a) = \lambda a$ donc $f^2(a) = \lambda^2 a = -a$ car $a \in \ker(f^2 + id_E)$. Or $a \neq 0$ donc $\lambda^2 = -1$ absurde car $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus $(f^2 + id_E)(f(a)) = (f^3 + f)(a) = 0$ donc $f(a) \in \ker(f^2 + id_E)$

R 11 On a $1 \leq \dim(\ker(f^2 + id_E)) \leq 3$ d'après la question 9

Si $\dim(\ker(f^2 + id_E)) = 3$ alors $\ker(f^2 + id_E) = E$ donc $f^2 + id_E = 0$, ce qui contredit la question.8

Le cas $\dim(\ker(f^2 + id_E)) = 1$ n'est pas possible d'après 10 donc $\dim(\ker(f^2 + id_E)) = 2$.

R 12 Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + id_E)$ vérifiant $x = a + b$.

Analyse: Supposons $x = a + b$, $(a, b) \in \ker(f) \times \ker(f^2 + id_E)$. On a alors $(f^2 + id_E)(x) = (f^2 + id_E)(a) + (f^2 + id_E)(b)$ donc $f^2(x) + x = f^2(a) + a + b = a$ et $b = -f^2(x)$. D'où l'unicité du couple (a, b) .

Synthèse: Posons $a = f^2(x) + x$ et $b = -f^2(x)$. On a bien $x = a + b$.

Montrons $a \in \ker(f)$: $f(a) = f^3(x) + f(x) = 0$.

Montrons $b \in \ker(f^2 + id_E)$: $(f^2 + id_E)(b) = -f^4(x) + f^2(x) = f(-f^3(x) + f(x)) = 0$ donc $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id_E)$.

R 13 On a $(f^2 + id_E) \circ f = 0$ donc $\boxed{\text{Im}(f) \subset \ker(f^2 + id_E)}$.

Or $\begin{cases} \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) & (\text{th du rang}) \\ \dim(\ker(f^2 + id_E)) = \dim(E) - \dim(\ker(f)) & (\text{propriété des sev supplémentaires}) \end{cases}$ donc $\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\ker(f^2 + id_E))}$
On en déduit que $\text{Im}(f) = \ker(f^2 + id_E)$.

R 14 Soit $a \in \ker(f^2 + id_E)$. On a Si $(a, f(a))$ est une famille libre $\ker(f^2 + id_E)$ (d'après Q 10) donc base de $\ker(f^2 + id_E)$ (d'après Q 11)

Or $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id_E)$ donc $\dim(\ker(f)) = 1$ et si c est un élément non nul de $\ker(f)$ $(a, f(a), c)$ est une base de E .

On a $f^2(a) + a = 0$ donc $f(f(a)) = -a$

Dans cette base $(a, f(a), c)$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

R 15 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur $]a, b]$ et continue en a .

Si f' admet une limite réelle l et a , alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$

R 16 Par théorème sur les opérations sur les fonctions, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

R 17 $x \cos(x) - \sin(x) = x(1 + o_{x \rightarrow 0}(x)) - (x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ donc $f'(x) = \frac{o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2} = o_{x \rightarrow 0}(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x) = 0$.

De plus, On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ donc f est continue en 0 donc, par le théorème limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x) = 0$.

R 18 f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x) = 0$ donc f' est continue en 0 donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

R 19 f est C^2 sur $\mathbb{R}^*$ (th op) et f

$$f''(x) = \frac{x^2(-x \sin(x)) - 2x(x \cos(x) - \sin(x))}{x^4} = \frac{-x^2 \sin(x) - 2x \cos(x) + 2 \sin(x)}{x^3}.$$

R 20 On en déduit que $f''(x) = \frac{-x^2(x + o_{x \rightarrow 0}(x)) - 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)}{x^3}$

$$f''(x) = \frac{x^3\left(-1 + 1 - \frac{1}{3}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x^3} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f''(x) = -\frac{1}{3}.$$

Comme f' est continue en 0, le théorème limite de la dérivée donne $f''(0) = -\frac{1}{3}$ (et donc f'' est continue en 0) donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

R 21 On a $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \rightarrow_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(0) = g(0)$ donc g est continue en 0. Or g est continue sur $\mathbb{R}^*$ (th opérations) donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

R 22 La fonction g est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (th opérations). Si $x \neq 0$, alors $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

Or $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et $f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o_{x \rightarrow 0}(x)$ (Taylor-Young) donc

$$xf'(x) - f(x) = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \text{ et } g'(x) = \frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0) + o_{x \rightarrow 0}(1) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} g'(x) = \frac{1}{2}f''(0).$$

Or g est continue en 0 donc d'après le théorème limite de la dérivée, g est dérivable en 0 et $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} g'(x) = \frac{1}{2}f''(0)$, ce qui entraîne la continuité de g' en 0 donc g est C^1 sur $\mathbb{R}$.

R 23 On a, pour $x \neq 0$, $g(x) = f(x) \times x^{-1}$. Posons $h(x) = x^{-1}$.

On montre par récurrence sur k que $h^{(k)}(x) = (-1)^k \times k! \times x^{-k-1}$ donc d'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times (-1)^{n-k} \times (n-k)! \times x^{-(n-k)-1} \\ &= \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k f^{(k)}(x) (-1)^k \times (n-k)! = \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

R 24 f est de classe C^∞ donc d'après la formule de Taylor-Young appliquée à $f^{(k)}$ à l'ordre $n - k + 1$ et 0,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{f^{(k+i)}(0)}{i!} x^i + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-k+1}) \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) &= \sum_{k=0}^n \left[(-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{f^{(k+i)}(0)}{i!} x^i + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-k+1}) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\sum_{i=0}^{n-k+1} (-1)^{n-k} \frac{x^{k+i}}{k! i!} f^{(k+i)}(0) \right] + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=k}^{n+1} (-1)^k \frac{x^j}{k! (j-k)!} f^{(j)}(0) \right] + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^n \left[x^j f^{(j)}(0) \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{k! (j-k)!} \right] \\ &\quad + x^{n+1} f^{(n+1)}(0) (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! ((n+1)-k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \end{aligned}$$

Or si $j \geq 1$, alors $\sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{k! (j-k)!} = j! \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} = j! (1 + (-1))^j = 0$ donc

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) = x^{n+1} f^{(n+1)}(0) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! ((n+1)-k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1}) \text{ car pour } j=0, f^{(j)}(0) = f(0) = 0 \text{ donc}$$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(0) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (j-k)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})}{x^{n+1}} = (-1)^n n! f^{(n+1)}(0) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (j-k)!} + o_{x \rightarrow 0}(1)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} g^{(n)}(x) = (-1)^n n! f^{(n+1)}(0) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! ((n+1)-k)!}.$$

Montrons par récurrence sur n que g est de classe C^n sur $\mathbb{R}$:

- C'est vrai pour $n=0$ (continuité de g).

Soit $n \geq 1$. Supposons g de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$. Montrons que g est C^n sur $\mathbb{R}$. La fonction g est C^n sur $\mathbb{R}^*$ (th opérations) et

- $g^{(n-1)}$ est continue en 0

- $g^{(n-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

- $(g^{(n-1)})' = g^{(n)}$ admet une limite réelle en 0

donc (th limite de la dérivée, $g^{(n-1)}$ est dérivable en 0 et $g^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} g^{(n)}(x)$, ce qui entraîne que $g^{(n)}$ est continue en 0 donc que g est de classe C^n .

$$\mathbf{R\ 25} \text{ On a donc } g^{(n)}(0) = (-1)^n n! f^{(n+1)}(0) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! ((n+1)-k)!} = (-1)^n \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k - (-1)^{n+1} \right).$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^{n+1} = 0 \text{ donc } g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$