

Semaines 3 et 4

I Contenu

- Révisions sur les déterminants.
- Somme directe, sous-espaces stables, matrices définies par blocs, produit par bloc (4 blocs). déterminant de Vandermonde ($V(a_0, \dots, a_n)$) et déterminant triangulaire par blocs.
- séries entières. **Pour les colleurs: la continuité, l'intégration et la dérivation terme à terme sur $] -R, R[$ sont admis provisoirement**
- Equations différentielles linéaire: révisions sur le premier ordre et le second ordre à coeff constant.
Equations différentielles linéaire du second ordre: Th de Cauchy(admis). Structure de l'ensemble des solutions d'une équation homogène.

II Questions de cours

1. Enoncer la formule de développement d'un déterminant par rapport à une colonne.
2. Montrer que le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est entier. (on détaillera la récurrence).
3. Calculer $\det(M)$ si $\forall i, m_{i,i} = 0$ et $m_{i,j} = 1$ sinon.
4. **Enoncés** sur les sommes directes: définition, caractérisation en dimension finie par les bases et par la dimension (énoncés seuls).
5. Montrer que $f(E_1 + \dots + E_p) = f(E_1) + \dots + f(E_p)$. On suppose que la somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe. Montrer que si f est injective, alors la somme $f(E_1) + \dots + f(E_p)$ est-elle directe? (exo)
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a & d \\ 1 & 0 & 0 & b & e \\ 0 & 1 & 0 & c & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$. Montrer que A^6 est triangulaire supérieure.
7. **Enoncé seul:** expression du déterminant de Vandermonde $\det(V(a_0, \dots, a_n))$.
8. Calculer le produit de matrices définies par blocs suivant: $\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$. Montrer que $\det\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}\right) = \det(A)$. En déduire la formule du déterminant triangulaire par blocs.
9. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
10. En admettant la question précédente, montrer que $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
11. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
12. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières?
13. Citer le théorème d'intégration terme et en déduire le développement en série entière de $\ln(1-x)$ et de $\ln(1+x)$.
14. Développer en série entière $\frac{1}{(1-x)^2}$ et $\frac{1}{(1-x)^3}$ sur $] -1, 1[$. En déduire, pour $x \in] -1, 1[$ les sommes $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.
15. Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.
16. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \arctan(x)$.
17. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

18. Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et de somme $f(x)$. Montrer que f est paire si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$.
19. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 3^n$ (exo).
20. En utilisant une série entière, montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
21. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (pour $x \in]-1, 1[$).
22. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{\frac{n}{2}}}{(2n)!}$.
23. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (utiliser les factorielles et puissances pour exprimer le résultat).
24. Résoudre l'équation $xy' + 3y = x^7$ sur $\mathbb{R}$ (recollement de solutions).
25. Montrer que l'unique solution sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation $y'' + 2y = \frac{\sin(x)}{x^2+1}$ vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est impaire.
26. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$.
27. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $t^2 y'' + t y' - y = 1$ (on cherchera des solutions de l'équation homogène de la forme $t \mapsto t^\alpha$).
28. Soit a, b des fonctions continues sur I et $(E_0) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Soit y_0 une solution sur I de (E_0) qui ne s'annule pas
On pose $y(x) = z(x)y_0(x)$. Montrer que y vérifie (E_0) si et seulement si z vérifie une équation que l'on précisera. Quel intérêt?
Application: Deviner une solution non nulle de $(\mathcal{H}) : (t+1)x''(t) - x'(t) - tx(t) = 0$ sur $] -1, +\infty[$. Donner l'équation vérifiée par z . Expliquer la suite de la résolution.
29. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $(\mathcal{E}) : x^2 y''(x) + y(x) = 0$ en posant $x = e^t$ (bien expliquer ce que signifie "poser $x = e^t$ ").
30. Donner une base de l'ensemble des solutions de $y'' + 2xy' + 2y = 0$ formée de deux fonctions développables en série entière, l'une des fonctions étant paire et l'autre impaire. Préciser la fonction paire (éventuellement traité lundi 6 octobre seulement). Dans ce cas au programme de la semaine 4 seulement)