

Exercice 1: Equation différentielle du deuxième ordre

Q 1 *Méthode de Lagrange, cas général*

Soit a et b des fonctions continues sur un intervalle I et $(E_0) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.

Soit y_0 une solution sur I de (E_0) qui ne s'annule pas

On pose $y(x) = z(x)y_0(x)$. (c'est à dire plus précisément $z(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$ et donc si y est deux fois dérivable si et seulement si z est deux fois dérivable).

Montrer que y vérifie (E_0) si et seulement si z vérifie $(E'_0) : y_0(x)z'' + (2y'_0 + ay_0)(x)z' = 0$.

Soit l'équation différentielle $(t^2 + 1)y''(t) - 2y(t) = t : (E)$. On utilise ce qui précède pour déterminer les solutions de l'équation homogène associée (E_0) sur $\mathbb{R}$.

Q 2 *Déterminer une solution polynômiale y_0 de l'équation homogène (E_0) associée.*

Q 3 *On pose $y(t) = y_0(t) \times z(t)$.*

a *Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si z est solution d'une équation (E'_0) à préciser.*

b *Résoudre l'équation $v'(t) + \frac{4t}{1+t^2}v(t) = 0$.*

c *Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du$.*

d *Résoudre (E_0) .*

Q 4 *En déduire les solutions de (E) .*

Exercice 2:

Soit A et B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $(i, j) \in [[1, n]]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont les coefficients sont tous nuls excepté le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Q 5 *Exprimer $\text{tr}(AE_{i,j})$ en fonction des coefficients de la matrice A .*

Q 6 *On suppose que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(AM) = \text{tr}(BM)$. Montrer que alors $A = B$.*

Q 7 *Justifier que l'application $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $f_A(M) = \text{tr}(AM)$ est une forme linéaire.*

Q 8 *Soit f une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f = f_C$.*

Q 9 *Soit une forme linéaire f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ $f(M \times N) = f(N \times M)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $f(M) = \alpha \text{tr}(M)$*

Exercice 3: matrices de trace nulle et matrices à diagonale nulle.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associée à A et b_0 la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que $A \neq 0$ et $\text{tr}(A) = 0$

Q 10 Montrer que si pour tout $e \in \mathbb{R}^n$ la famille $(e, f(e))$ est liée alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Q 11 En déduire qu'il existe $e \in \mathbb{R}^n$ non nul vérifiant: la famille $(e, f(e))$ est libre.

Q 12 En déduire qu'il existe une base b de E dans laquelle la matrice de f est une matrice définie par blocs sous forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & L' \\ \hline X' & A' \end{array} \right)$ avec $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $L' \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite, les notations A' , X' et L' font référence aux matrices obtenues dans la question précédente.

Q 13 Soit $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ et P définie par blocs sous forme $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & Q \end{array} \right)$.

Montrer que P est inversible et préciser son inverse.

Q 14 Soit $A'' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. On suppose que A'' est semblable à A' .

Déduire de la question précédente qu'il existe $X'' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $L'' \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ tels que $\left(\begin{array}{c|c} 0 & L' \\ \hline X' & A' \end{array} \right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} 0 & L'' \\ \hline X'' & A'' \end{array} \right)$ sont semblables.

Q 15 Une matrice carrée est dite à diagonale nulle si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont nuls. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de trace nulle si et seulement si il existe une matrice à diagonale nulle semblable à A .

Exercice 1:

R 1 On a $y = zy_0$ donc $y' = z'y_0 + zy'_0$ donc $y'' = z''y_0 + 2z'y'_0 + zy''_0$.
donc

$$\begin{aligned}(E_0) &\Leftrightarrow (z''y_0 + 2z'y'_0 + zy''_0) + a(z'y_0 + zy'_0) + bzy_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0z'' + (2y'_0 + ay_0)z' + (y''_0 + ay'_0 + by_0)z = 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_0z'' + (2y'_0 + ay_0)z' = 0 \text{ car } y_0 \text{ est solution de } (E_0)\end{aligned}$$

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \Leftrightarrow (z''y_0 + 2z'y'_0 + zy''_0) + a(z'y_0 + zy'_0) + bzy_0 = 0$$

R 2 On remarque que $y_0; t \mapsto (t^2 + 1)$ est solution de (E_0) .

R 3 On pose $y = y_0 \times z$.

a En reprenant la première question avec $(E_0) : y''(t) - \frac{2}{t^2 + 1}y'(t) = 0 : (E_0)$ on obtient

$$(E_0) \Leftrightarrow y_0z'' + 4tz' = 0 \Leftrightarrow z'' + \frac{4t}{1+t^2}z' = 0 : (E'_0).$$

b En posant $a(t) = \frac{4t}{1+t^2}$ dont une primitive est $A(t) = 2\ln(1+t^2)$, on obtient comme solutions de $v' + \frac{4t}{1+t^2}v = 0$ les fonctions:
 $t \mapsto \lambda e^{-2\ln(1+t^2)} = \frac{\lambda}{(1+t^2)^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque.

c On a $\int_0^t \frac{u^2}{1+u^2} du = \int_0^t \frac{(1+u^2) - 1}{1+u^2} du = t - \arctan(t)$.

$$IPP \text{ avec } f(u) = \frac{1}{1+u^2} \text{ et } f'(u) = \frac{-2u}{(1+u^2)^2} \text{ et } g(u) = u \text{ et } g'(u) = 1 :$$

$$\text{donc } \int_0^t \frac{1}{1+u^2} dt = \left[\frac{u}{1+u^2} \right]_0^t - \int_0^t \frac{-2u^2}{(1+u^2)^2} du \text{ donc}$$

$$\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = \frac{1}{2} \left(\int_0^t \frac{1}{1+u^2} dt - \frac{t}{1+t^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctan(t) - \frac{t}{1+t^2} \right).$$

d Or $\int_0^t \frac{1}{(1+u^2)^2} du = \int_0^t \frac{(1+u^2) - u^2}{(1+u^2)^2} du = \arctan(t) - \frac{1}{2} \left(\arctan(t) - \frac{t}{1+t^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctan(t) + \frac{t}{1+t^2} \right)$.

$$\text{Or } y \text{ vérifie } (E'_0) \Leftrightarrow z' \text{ vérifie } v' + \frac{4t}{1+t^2}v = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, z' : t \mapsto \frac{\lambda}{(1+t^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}, z : t \mapsto \frac{\lambda}{2} \left(\arctan(t) + \frac{t}{1+t^2} \right) + \mu \Leftrightarrow$$

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}, y : t \mapsto \frac{\lambda}{2} ((1+t^2) \arctan(t) + t) + \mu(1+t^2).$$

R 4 On remarque que $t \mapsto -\frac{t}{2}$ est solution de $(t^2 + 1)y''(t) - 2y(t) = t$ donc les solutions de (E) sont les fonctions:

$$t \mapsto \frac{\lambda}{2} ((1+t^2) \arctan(t) - t) + \mu(1+t^2) - \frac{t}{2}.$$

Exercice 2:

R 5 On a $AE_{i,j} = \begin{pmatrix} & j^{\text{è}} \text{ col} \\ 0 \cdots 0 & a_{1,i} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & a_{n,i} & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.

R 6 Supposons que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(AM) = \text{tr}(BM)$. On a alors $a_{j,i} = \text{tr}(AE_{i,j}) = \text{tr}(BE_{i,j}) = b_{j,i}$ donc pour (i,j) quelconque donc $A = B$.

R 7 L'ensemble d'arrivée est $\mathbb{K}$. De plus $f_A(\lambda M + \mu N) = \text{tr}(A(\lambda M + \mu N)) = \text{tr}(\lambda AM + \mu AN) = \lambda \text{tr}(AM) + \mu \text{tr}(AN)$ par linéarité de la trace donc $f_A(\lambda M + \mu N) = \lambda f_A(M) + \mu f_A(N)$ donc f_A est une forme linéaire.

R 8 L'application f est linéaire donc est définie par l'image d'une base. Posons $f(E_{i,j}) = u_{i,j}$. En posant $a_{i,j} = u_{j,i}$, on aura $\text{tr}(AE_{i,j}) = f(E_{i,j})$. La famille des $E_{i,j}$ étant une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \text{tr}(AM)$ donc $f = f_A$.

R 9 L'application f est une forme linéaire donc il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f = f_A$. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ $f(M \times N) = f(N \times M)$ donc $\text{tr}(A(MN - NM)) = 0$. Soit $i \neq j$ et $M = E_{i,i}$ et $N = E_{i,j}$. On a $MN = E_{i,j}$ et $NM = 0$ donc $\text{tr}(A(MN - NM)) = \text{tr}(AE_{i,j}) = 0$ donc $a_{j,i} = 0$. Prenons maintenant $M = E_{i,j}$ et $N = E_{j,i}$. On a $MN = E_{i,i}$ et $NM = E_{j,j}$ donc $\text{tr}(A(MN - NM)) = \text{tr}(A(E_{i,i} - E_{j,j})) = a_{i,i} - a_{j,j}$. On en déduit donc que A est de la forme kI_n et donc pour tout M , $f(M) = \text{tr}(AM) = \text{tr}(kM) = k \text{tr}(M)$ donc $f = k \text{tr}$.

Exercice 3:

R 10 Question traitée en exercice: Si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\forall x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée alors il existe λ tel que $f = \lambda \text{id}_E$.

R 11 On a $A \neq 0$ et $\text{tr}(A) = 0$. Si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, la famille $(x, f(x))$ est liée alors il existe λ tel que $A = \lambda I_n$ donc $\text{tr}(A) = n\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $A = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $A \neq 0$. donc 'il existe $e \in \mathbb{R}^n$ non nul vérifiant: la famille $(e, f(e))$ est libre.

R 12 On complète la famille libre $(e, f(e))$ en une base $b_1 = (e, f(e), e_3, \dots, e_n)$. Dans cette base, la première

colonne de la matrice est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc la matrice de f est une matrice définie par blocs sous forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & L' \\ \hline X' & A' \end{array} \right)$

avec $A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$.

R 13 En posant $R = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & Q^{-1} \end{array} \right)$, les règles du produit par blocs donnent $PR = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & QQ^{-1} \end{array} \right) = I_n$ donc P est inversible d'inverse R .

R 14 On suppose que A'' est semblable à A' donc il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $A'' = Q^{-1}A'Q$. Avec la matrice R inversible définie dans la question précédente,

$$\begin{aligned} R^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & L' \\ \hline X' & A' \end{array} \right) R &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & Q^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & L' \\ \hline X' & A' \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & Q \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & Q^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & L'Q \\ \hline X' & A'Q \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L'Q \\ \hline Q^{-1}X'' & Q^{-1}A'Q \end{array} \right) \text{ qui est bien de la forme } \left(\begin{array}{c|c} 0 & L'' \\ \hline X'' & A'' \end{array} \right). \end{aligned}$$

R 15 Sens réciproque: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à B matrice à diagonale nulle alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$. Montrons le sens direct par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$. Si A de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est de trace nulle alors $A = 0$ donc A semblable à 0 qui est à diagonale nulle.

Soit $n \geq 2$. Supposons que toute matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. D'après ce qui précède, A est semblable à une matrice de la forme $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L' \\ \hline X' & A' \end{array} \right)$.

et par propriété des matrices semblables $\text{tr}(A) = \text{tr}(A_1) = \text{tr}(A')$ donc $\text{tr}(A') = 0$ donc (HR) il existe $A'' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ à diagonale nulle semblable à A' .

Par la question précédente, A_1 est semblable à une matrice A_2 de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & L'' \\ \hline X'' & A'' \end{array} \right)$ qui est à diagonale nulle.

Par transitivité de la relation "est semblable", A est semblable à A'' , ce qui achève la récurrence.