

PSI DS2, le mercredi 6 octobre 2021, 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages

Si un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Questions proches du cours

1. Soit (a_n) une suite de réels. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$.

On pose, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Montrer que f est paire si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p+1} = 0$.

2. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières $\sum n x^n$ et $\sum n^2 x^n$.

3. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \arctan(x)$.

En déduire la valeur $S = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

Vérifier que la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$ est spéciale alternée.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Donner un majorant simple de $\left| S - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \right|$.

Ecrire un script python qui donne une valeur approchée de $\sqrt{3}S$ à 10^{-5} près.

Exercice 1:

On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $] -1, 1[$ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur l'intervalle $] -1, 1[$.

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$.

On pose, pour $x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose que

$$\forall x \in]-R, R[, (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0 : (E).$$

(a) Montrer que $a_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{(n+1)a_n}{n+2}$.

(b) En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$ une expression de a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p et a_0 utilisant des factorielles et des puissances.

(c) Déterminer la valeur de R .

3. En déduire que f admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$ et préciser ce développement.

4. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant le développement en série entière connu de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

5. Montrer que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ admet un développement en série entière sur $] -1, 1[$ et préciser ce développement.

Exercice 2:

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On note f l'application linéaire canoniquement associée à A et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Préliminaire

0. Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux, $b_0, \dots, b_n$ des réels quelconques.
Montrer qu'il existe un et un seul polynôme à coefficients réels P de degré inférieur ou égal à n vérifiant $\forall i \in [0, n], P(a_i) = b_i$.

Matrices semblables

On pose $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ et $u_2 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Déterminer les images de u_1 et u_2 par f .

2. Déterminer les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $AX = 4X$.

En déduire qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_3 = e_1 + \alpha e_2 + \beta e_3$ vérifie $f(u_3) = 4u_3$.

3. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) obtenue dans les questions précédentes est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer une matrice inversible P de taille 3 telle que $P^{-1}AP = D$.

Dans la suite, on note P la matrice obtenue à la question précédente.

Racines carrées de la matrice A

5. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $N^2 = D$. Justifier que $ND = DN$ et en déduire que N est diagonale.
6. Combien existe-t-il de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$?
Exprimer ces matrices à l'aide de P et P^{-1} .

Combinaisons linéaires de I , A et A^2

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $D' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et $A' = PD'P^{-1}$.

7. Montrer que A' est combinaison linéaire de I_3, A et A^2 .

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $(i, j) \in [[1, n]]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Pour $(i, j) \in [[1, n]]^2$ tel que $i < j$, on pose

$$F_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i} \text{ et } G_{i,j} = E_{i,j} + 4E_{j,i}.$$

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans la suite, on considère $(i, j) \in [[1, n]]^2$ et $i < j$.

1. Soit $f_{i,j}$ l'application linéaire canoniquement associée à $F_{i,j}$.

$$\text{Pour } k \in [[1, n]] \text{ on pose } u_k = \begin{cases} e_k & \text{si } k \notin \{i, j\} \\ e_i + e_j & \text{si } k = i \\ e_j - e_i & \text{si } k = j \end{cases}.$$

- (a) Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- (b) Déterminer, pour $k \in [[1, n]]$, le vecteur $f_{i,j}(u_k)$.
- (c) En déduire que $F_{i,j}$ est semblable à $E_{i,i} - E_{j,j}$ et donner une matrice P telle que $P^{-1}F_{i,j}P = E_{i,i} - E_{j,j}$. Préciser la matrice P^{-1} .

2. Soit $g_{i,j}$ l'application linéaire canoniquement associée à $G_{i,j}$.

$$\text{Pour } k \in [[1, n]] \text{ on pose } v_k = \begin{cases} e_k & \text{si } k \neq j \\ 2e_j & \text{si } k = j \end{cases}$$

- (a) Déterminer, pour $k \in [[1, n]]$, le vecteur $g_{i,j}(v_k)$.
- (b) En déduire que $G_{i,j}$ est semblable à $2(E_{i,i} - E_{j,j})$.

3. Soit les familles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathcal{F}_1 = (F_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n)$, $\mathcal{F}_2 = (G_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n)$ et $\mathcal{F}_3 = (E_{i,i}, 1 \leq i \leq n)$.

Soit $\mathcal{F}$ la famille de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les familles $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (il y a une imprécision sur l'ordre des vecteurs des familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ mais cela n'a pas d'incidence sur la question posée).

Remarque Pour les 5/2: cet exercice montre que l'on peut trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables.

Exercice 4:

Pour $x \in]-1, 1[$, si $x \neq 0$, on pose $u(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. Montrer que la fonction u admet un prolongement par continuité en $x = 0$.

Dans la suite, on pose $u(0) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ (on note donc encore u le prolongement par continuité obtenu).

2. Justifier que la fonction u est de classe C^1 sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ et calculer $u'(x)$ pour $x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$.

3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\left(1 - \frac{1}{1-x}\right)x^2 - 2x(x + \ln(1-x)) = \lambda x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$.

En déduire que u est de classe C^1 sur $] -1, 1[$.

4. En utilisant un développement en série entière connu, montrer que u est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et préciser ce développement. En déduire que u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. (Cette question donne donc une réponse plus rapide et plus forte aux questions précédentes).

5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$.

6. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in] -1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

7. Montrer que pour $x \in] -1, 1[$, $f(x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = f'(x)$.

8. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

9. En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

10. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Correction du DS2

Questions proches du cours

1. Fait en cours

2. Fait en cours

3. Si $|x| < 1$ alors $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}$ (vu en cours: intégration terme à terme de $\frac{1}{1+x^2}$). On a donc

$$\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \text{ donc } S = \frac{\pi}{6}. \text{ Posons } u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$
$$\begin{cases} (-1)^n u_n = \frac{1}{(2n+1)3^n} > 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)3^n = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \\ (2n+3)3^{n+1} > (2n+1)3^n > 0 \text{ donc, par passage à l'inverse, } |u_{n+1}| < |u_n| \text{ donc } (|u_n|) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

On en déduit (CSSA) que $\left| S - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(2n+3)3^{n+1}}.$

On a donc $\left| \sqrt{3}S - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)3^{n+1}}.$

```
sgn,n,P,S=1,0,1,0
```

```
while (2*n+3)*3*P>10**-5:
```

```
    n=n+1
```

```
    sgn=-sgn
```

```
    P=3*P
```

```
    S=S+sgn/((2*n+1)*P)
```

```
from math import pi,sqrt
```

```
print(n, S-sqrt(3)*pi/6) # affiche 7 -6.910203760757128e-0
```

Exercice 1:

On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

1. On a $1-x^2 > 0$ pour $x \in]-1, 1[$ et la fonction racine est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie et dérivable sur $] -1, 1[$ donc f est dérivable sur $] -1, 1[$ et $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ donc $f'(x) = -2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$ On a $(1-x^2)f'(x) = xf(x)$ donc f vérifie l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)y' - xy = 0.$

(a) D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, y est dérivable et pour tout

$x \in]-R, R[$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$ On a donc

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0 &\Leftrightarrow (1-x^2) \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=1 \rightarrow 0}^{+\infty} na_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^{n+1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_{n-1} x^n = 0 \\
&\Leftrightarrow a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - na_{n-1}) x^n = 0
\end{aligned}$$

donc, par unicité du développement en série entière, $(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0$. Donc

$$(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0 \text{ soit } a_{n+2} = \frac{(n+1)a_n}{n+2}$$

(b) On a $a_1 = 0$ et $a_3 = \frac{2a_n}{3}$ donc $a_3 = 0$. On montre par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= \frac{(2p-1)}{2p} a_{2p-2} \\
&= \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} a_{2p-4} \\
\text{On a} \quad &= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)}{2p(2p-2)(2p-4)} a_{2p-6} \\
&\vdots \\
&= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5) \times \dots \times 1}{2p(2p-2)(2p-4) \times \dots \times 2} a_0 \\
\text{On a donc } a_{2p} &= \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^p 2k} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1) \times \prod_{k=1}^p 2k}{\left(\prod_{k=1}^p 2k\right)^2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} a_0.
\end{aligned}$$

(c) On a donc $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p}$. Posons pour $x \neq 0$, $u_p = a_{2p} x^{2p}$. On a $\left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| = \left| \frac{a_{2p+2} x^2}{a_{2p}} \right| = \frac{2p+1}{2p+2} x^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x^2$.
Si $x^2 < 1$ alors $\sum a_{2p} x^{2p}$ converge absolument et si $x^2 > 1$ alors $\sum a_{2p} x^{2p}$ diverge donc $R = 1$.

2. La fonction f vérifie $\begin{cases} f'(x) - \frac{x}{(1-x^2)} f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ et si $a_0 = 1$, $\begin{cases} y'(x) - \frac{x}{(1-x^2)} y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ donc, d'après

le théorème de Cauchy, $f = y$. On en déduit que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} x^{2p}$.

3. On a, pour $x \in]-1, 1[$, $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $b_0 = 1$ et $b_n = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^n} \times 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2}$. On en déduit que, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

4. La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est une primitive de f sur $] -1, 1[$ donc d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries entières,

$$\forall x \in] -1, 1[, \arcsin(x) = \arcsin(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Exercice 2:

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. On note f l'application linéaire canoniquement associée à A .
Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Préliminaire

0. Voir exercice du cours.

Matrices semblables

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f(u_1) = u_1$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $f(u_2) = 2u_2$. Déterminer l'image de u_1 par f .

2. $AX = 4X \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4x_1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4x_2 \\ -2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4x_1 \\ x_2 = 3x_1 \end{cases}$ donc
 $AX = 4X \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ 4x_1 \end{pmatrix}$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$ quelconque. On en déduit que l'unique choix pour de (α, β) est obtenu pour $x_1 = 1$ et donc que $u_3 = e_1 + 3e_2 + 4e_3$ vérifie $f(u_3) = 4u_3$.

3. On a $mat_{(e_1, e_2, e_3)}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ de même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ($C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $j \in \{2, 3\}$)
donc de même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible donc $mat(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
est inversible donc la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit $P = P_{(e_1, e_2, e_3)}^{(u_1, u_2, u_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On a $A = mat_{(e_1, e_2, e_3)}(f)$ et $D = mat_{(u_1, u_2, u_3)}(f)$ car $f(u_1) = u_1$,
 $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = 4u_3$ donc $P^{-1}AP = D$.

Racines carrées de la matrice A

5. Si $N^2 = D$ alors $ND = NN^2 = N^3 = N^2N = DN$. Posons $N = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$. On a $ND =$
 $\begin{pmatrix} a & 2d & 4g \\ b & 2e & 4h \\ c & 2f & 4i \end{pmatrix}$ et $DN = \begin{pmatrix} a & d & g \\ 2b & 2e & 2h \\ 4c & 4f & 4i \end{pmatrix}$ donc $d = g = b = h = c = f = 0$ donc N est diagonale.

6. Posons $N = P^{-1}MP$. On a $M^2 = A \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \Leftrightarrow N^2 = D$ car $P^{-1}M^2P = (P^{-1}MP)^2$. Or $N^2 = D$ entraîne N diagonale donc les solutions de l'équation $N^2 = D$ sont les 8 matrices de la forme
$$N = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$$
. On en déduit que les solutions de l'équation $M^2 = A$ sont les 8 matrices PNP^{-1} où N est une des 8 solutions de l'équation $N^2 = D$ (qui sont bien deux à deux distinctes car $N = N' \Leftrightarrow PNP^{-1} = PNP^{-1}$).

Combinaisons linéaires de I , A et A^2

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $D' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et $A' = PD'P^{-1}$.

7. Commençons par montrer que D' est combinaison linéaire de I_3, D et D^2 . Posons $Q = aX^2 + bX + c$. On a
$$aI_3 + bD + cD^2 = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b \times 2 + c \times 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b \times 4 + c \times 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(2) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix}$$
. On a donc $D' = aI_3 + bD + cD^2 \Leftrightarrow \begin{cases} Q(1) = \alpha \\ Q(2) = \beta \\ Q(4) = \gamma \end{cases}$. Or, d'après la question préliminaire, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\begin{cases} Q(1) = \alpha \\ Q(2) = \beta \\ Q(4) = \gamma \end{cases}$ donc $\exists! (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, D' = aI_3 + bD + cD^2$. Or $D' = aI_3 + bD + cD^2 \Rightarrow PD'P^{-1} = P(aI_3 + bD + cD^2)P^{-1} \Rightarrow A' = aI_3 + bA + cA^2$ donc A' est combinaison linéaire de I_3, A et A^2 .

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(i, j) \in [[1, n]]^2$. On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1. On suppose $i < j$ et on pose $F_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$ et $G_{i,j} = E_{i,j} + 4E_{j,i}$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $f_{i,j}$ l'application linéaire canoniquement associée à $F_{i,j}$. Pour $k \in [[1, n]]$ on pose $u_k = \begin{cases} e_k & \text{si } k \notin \{i, j\} \\ e_i + e_j & \text{si } k = i \\ e_i - e_j & \text{si } k = j \end{cases}$

(a) On a $\begin{cases} u_i = e_i + e_j \\ u_j = e_j - e_i \end{cases}$ donc $\begin{cases} e_i = \frac{1}{2}(u_i + u_j) \\ e_j = \frac{1}{2}(u_j - u_i) \end{cases}$ et, si $k \notin \{i, j\}$, $e_k = u_k$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une

base de $\mathbb{R}^n$ donc tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_n)$ et donc, d'après les relations précédentes, est combinaison linéaire de $(u_1, \dots, u_n)$. On en déduit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ qui contient $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ éléments donc est une base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Si $k \notin \{i, j\}$, $u_k = e_k$ donc $f_{i,j}(u_k) = f_{i,j}(e_k) = 0$ car la $k^{\text{ième}}$ colonne de $F_{i,j}$ est nulle. De plus $f_{i,j}(e_i) = e_j$ et $f_{i,j}(e_j) = e_i$ donc par linéarité, $f_{i,j}(u_i) = e_j + e_i = u_i$ et $f_{i,j}(u_j) = e_i - e_j = -u_j$.

(c) On a $F_{i,j} = \text{mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(f_{i,j})$ et, d'après la question précédente, $E_{i,i} - E_{j,j} = \text{mat}_{(u_1, \dots, u_n)}(f_{i,j})$ donc $F_{i,j}$

est semblable à $E_{i,i} - E_{j,j}$ et $P^{-1}F_{i,j}P = E_{i,i} - E_{j,j}$ avec $P = \mathcal{P}_{(e_1, \dots, e_n)}^{(u_1, \dots, u_n)} =$

$$\begin{pmatrix} & & C_i & C_j & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_i \\ L_j \end{matrix}$$

(les coefficients non indiqués sont nuls).

On a $P^{-1} = \mathcal{P}_{(u_1, \dots, u_n)}^{(e_1, \dots, e_n)} =$

$$\begin{pmatrix} & & C_i & C_j & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_i \\ L_j \end{matrix}.$$

2. Soit $g_{i,j}$ l'application linéaire canoniquement associée à $G_{i,j}$. Pour $k \in [[1, n]]$ on pose $v_k = \begin{cases} e_k & \text{si } k \neq j \\ 2e_j & \text{si } k = j \end{cases}$
 - (a) On a $g_{i,j}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{i, j\} \\ 4e_j & \text{si } k = i \\ e_i & \text{si } k = j \end{cases}$ donc Si $k \notin \{i, j\}$, $g_{i,j}(v_k) = g_{i,j}(e_k) = 0$ et $g_{i,j}(v_i) = g_{i,j}(e_i) = 4e_j = 2v_j$ et $g_{i,j}(v_j) = g_{i,j}(2e_j) = 2e_i = 2v_i$.
 - (b) La famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ $G_{i,j} = \text{mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(f_{i,j})$ et, d'après la question précédente, $2F_{i,j} = \text{mat}_{(u_1, \dots, u_n)}(f_{i,j})$. On en déduit que $G_{i,j}$ est semblable à $2F_{i,j}$. Or $P^{-1}(2F_{i,j})P = 2P^{-1}F_{i,j}P = 2(E_{i,i} - E_{j,j})$ donc $2(E_{i,i} - E_{j,j})$ est semblable à $2F_{i,j}$ donc à $G_{i,j}$.
3. Il y a $n^2 - n$ couples (i, j) avec $i \neq j$ donc Il y a $\frac{n^2 - n}{1}$ couples (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$. Les familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ contiennent donc $\frac{n^2 - n}{1}$ éléments donc la famille $\mathcal{F}$ contient $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ éléments.
 Si $i < j$, alors $\begin{cases} F_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i} \\ G_{i,j} = E_{i,j} + 4E_{j,i} \end{cases}$ donc $\begin{cases} E_{i,j} = \frac{1}{3}(4F_{i,j} - G_{i,j}) \\ E_{j,i} = \frac{1}{3}(-F_{i,j} + G_{i,j}) \end{cases}$. Les éléments de la base des matrices élémentaires sont donc tous des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4:

1. On a $u(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} = \frac{x - x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}{x^2} \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = -\frac{1}{2}$
 donc u admet un prolongement par continuité en zéro. On pose $u(0) = \frac{1}{2}$.
 2. D'après les théorèmes sur les opérations, la fonction u est de classe C^1 sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ et
- $$u'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{1-x}\right)x^2 - 2x(x + \ln(1-x))}{x^4}.$$

3. posons $v(x) = \left(1 - \frac{1}{1-x}\right)x^2 - 2x(x + \ln(1-x))$.

On a $v(x) = x^2(1 - (1-x + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2))) - 2x\left(x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)$ donc $v(x) = -\frac{x^4}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^4}{3}$. On en déduit que $u'(x) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^4}{3x^4}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = -\frac{1}{3}$.

La fonction u est continue sur $] -1, 1[$, dérivable sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = -\frac{1}{3}$ donc, d'après le théorème limite de la dérivée, u est dérivable en 0 et $u'(0) = -\frac{1}{3}$. On a donc $\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = u'(0)$ donc u' est continue en 0 donc u est de classe C^1 sur $] -1, 1[$.

4. Soit $x \in] -1, 1[\setminus 0$. On a $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ donc

$$u(x) = \frac{x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}{x^2} = \frac{-\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}{x^2} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.$$

5. Montrons par récurrence forte sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$ (HR_n).

Initialisation : Par hypothèse, $a_0 = 1 \in]0, 1]$, donc on a bien HR_0 .

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in [[0, n]]$.

Alors

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+2} \quad (\text{d'après } HR_k \text{ } a_k \leq 1 \text{ pour } 0 \leq k \leq n) \text{ donc}$$

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1 \text{ car si } n-k+2 \geq 2 \geq 1 \text{ donc } \frac{1}{n-k+2} \leq 1 \text{ et}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2} > 0 \quad (\text{d'après } HR_k, a_k > 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq n)$$

donc on a bien HR_{n+1} .

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.

6. On a $|a_n| \leq 1$ donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à celui de la série entière $\sum x^n$ donc $R \geq 1$.

7. Les deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, donc le produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ de ces deux séries entières, a aussi un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

De plus, par définition du produit de Cauchy de deux séries (entières), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^n a_k \times \frac{1}{n-k+2} = (n+1)a_{n+1}$. On en déduit que $x \in] -1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n \\ &= f'(x) \quad (\text{th de dérivation terme à terme des SE}) \end{aligned}$$

8. La série entière $\sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ est obtenue par primitivation de la série entière $\sum \frac{x^n}{n+2}$ donc a même rayon de convergence qui est donc égal à 1.

De plus $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ donc et, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ convergent donc pour tout $x \in]-1, 1[$, si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x) - \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x) = 1 + \ln(1-x) \frac{1-x}{x} \end{aligned}$$

De plus, la valeur en $x = 0$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ est nulle.

9. La fonction f vérifie l'équation différentielle $y' + u(x)y = 0$ avec $u(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2}$ et la fonction u est continue donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \lambda e^{-U(x)}$ ou U est une primitive de u . D'après la question précédente, on peut prendre $U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -(1 + \ln(1-x) \frac{1-x}{x}) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$.
Or $f(0) = a_0 = 1$ donc $\lambda = 0$. On en déduit que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e(1-x)^{\frac{1-x}{x}} & \text{si } x \in]-1, 1[\setminus 0 \end{cases}$$

10. Comme $1/2 \in]-1, 1[$ est à l'intérieur du disque ouvert de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = e\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1-1/2}{1/2}} = \frac{e}{2}.$$

Remarques générales:

- La notation $n!$ suppose que $n \in \mathbb{N}$ (pas défini sinon).
- Une fonction de classe C^∞ n'est pas nécessairement développable en série entière.

Questions proches du cours:

- Utiliser le quantificateur $\forall n \dots$ lorsque vous appliquez l'unicité du DSE
- Justification des rayons de convergence avant de faire le calcul:
 - règle sur na_n et a_n
 - série dérivée et série primitive de même rayon de convergence
 - on remplace x par $-x^2$ dans une série dont on connaît le rayon de convergence
- Ecrire pour quel x la relation est vérifiée.
- il est plus simple de dériver $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ que de dériver $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$
- définition et théorème sur les séries alternées **à revoir**.
- $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est une des valeurs connues de $\arctan$.
- la règle de d'Alembert n'est pas une équivalence.

Exercice 1:

1: La fonction racine est une des fonctions pour laquelle il vaut mieux être précis car $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$ mais dérivable seulement sur $]0, +\infty[$.

2: Dans Q2, on ne suppose pas que $y = f$ (cf Q3)

2a: Utiliser le quantificateur $\forall$ lorsque vous appliquez l'unicité du DSE.

2c: Attention à ne considérer que les $a_{2p}x^{2p}$ dans la règle de d'Alembert (un terme sur deux est nul donc on ne considère pas $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|$). Le plus simple pour utiliser la règle de D'Alembert est de remarquer que $a_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}a_{2p}$ (relation obtenue précédemment).

3: pour identifier f à une des solutions développable en série entière, utiliser le théorème de Cauchy. Une condition de la forme $y'(x_0) = \alpha$ ne garantit pas l'unicité (c'est $y(x_0) = \alpha$).

4: $x \mapsto \arcsin(x)$ est définie et continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2:

0: Ne pas mélanger les deux preuves vues en cours.

4: Ne pas intervertir P et P^{-1} dans la formule de changement de base. Ne pas utiliser la locution "il existe P " si vous donnez cette matrice explicitement (ce qui montre qu'elle existe).

6 Le résultat de 5 n'est pas une équivalence: il ne suffit pas que N soit diagonale pour que $N^2 = D$.

7: calculs inutiles grâce à la question 0 (et en raisonnant par changement de base)

Exercice 3

2b: beaucoup ont cru à une erreur d'énoncé car la première naturelle du raisonnement n'amenait pas au résultat. (une deuxième était nécessaire).

Exercice 4:

Des erreurs dans le DL de $\ln(1-x)$

1: Ne pas confondre continuité et dérivabilité.

- 2: On peut dire que f est C^1 avant de calculer f' (par application des th)
 - 3: ne pas oublier la continuité dans le th limite de la dérivée.
 - 4: Récurrence forte à préciser: HR: $\forall k \in [[0, n]], 0 < a_k \leq n$.
 - 5: Comparaison avec valeur absolue: $|a_n| \leq 1$ donc $R \geq 1$.
- Attention: on compare les coeff mais pas les sommes!
- 9: On avait une équa diff à résoudre!