Exercice 1 *Soit h une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant 0 pour limite en $+\infty$. Montrer que toute solution de l'équation $y' + y = h$ sur $\mathbb{R}$ admet 0 comme limite en $+\infty$.*

Solution de l'exercice:

La méthode de variation de la constante aboutit aux solutions: $y : x \mapsto \lambda e^{-x} + y_p(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $y_p(x) = e^{-x} \times \int_0^x e^t h(t)\,dt$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ donc $\exists A > 0$ tel que $\forall t \geq a, |h(t)| \leq \varepsilon/2$.
Pour $x \geq a$, On a $y_p(x) = e^{-x} \times \int_0^a e^t h(t)\,dt + e^{-x} \times \int_a^x e^t h(t)\,dt$.
$|y_p(x)| \leq e^{-x} \times \left|\int_0^a e^t h(t)\,dt\right| + e^{-x} \times \left|\int_a^x e^t h(t)\,dt\right|$.

Or $e^{-x} \times \left|\int_a^x e^t h(t)\,dt\right| \leq e^{-x} \times \int_a^x e^t |h(t)|\,dt \leq e^{-x} \times \varepsilon/2 \int_a^x e^t dt \leq \varepsilon/2 \times e^{-x}(e^x - e^a) \leq \varepsilon/2$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \times \left|\int_0^a e^t h(t)\,dt\right| = 0$ donc $\exists B > 0, \forall x \geq B$, $e^{-x} \times \left|\int_a^x e^t h(t)\,dt\right| \leq \varepsilon/2$.
Si $x \geq \max(A, B)$, on a $|y_p(x)| \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$. On peut prendre $\varepsilon > 0$ quelconque donc $\lim\limits_{+\infty} y_P = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} y = 0$

Exercice 2 *Soit (b_n) une suite de réels. On suppose que la $\sum b_n x^n$ série entière $\sum b_n x^n$ admet un de rayon de convergence égal à 1 et on pose, pour $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Soit $(\mathcal{E}) : (1-x)\,y'(x) + y(x) = g(x)$. Montrer que l'équation $(\mathcal{E})$ admet une solution sur $]-1, 1[$ développable en série entière (on pourra appliquer la méthode de variation de la constante).*

Solution de l'exercice:

La solution de l'équation homogène est $x \mapsto \lambda(1-x)$ (laissé au lecteur)
En posant $y_0(x) = 1 - x$ et $y = zy_0$, on a y vérifie $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow z'y_0 = g \Leftrightarrow z' = \dfrac{g}{y_0}$ soit,
$\forall x \in]-1, 1[$, $z'(x) = g(x) \times \dfrac{1}{1-x}$.
Or $x \mapsto g(x)$ et et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$sont développables en série entière sur $]-1, 1[$ donc $x \mapsto g(x) \times \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ (th sur le produit de Cauchy de SE)
Une primitive z de $x \mapsto g(x) \times \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ (th sur les primitives de SE).
La fonction $x \mapsto (1-x) \times z(x)$ est solution de $(\mathcal{E})$ développable en série entière sur $]-1, 1[$:
Ici le th sur le produit de Cauchy de SE est inutile: Si $\sum c_n x^n$ converge alors $(1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+1} = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (c_n + c_{n-1})\,x^n$.
Remarque: on doit pouvoir exprimer les coefficient de la solution en fonction des b_n.