

PSI DS 2 (le mercredi 8 octobre 2025)

Le sujet comporte 4 pages

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les questions doivent être rédigées dans l'ordre (quitte à laisser de la place pour revenir sur une question ultérieurement).

applications directes du cours

Q 1 Justifier de la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!}$.

Q 2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n}{n + \sqrt{n}} x^{2n}$.

Q 3 Rappeler le développement en série entière de $\ln(1-x)$ et de $\ln(1+x)$.

Déterminer le rayon convergence R de la série entière $\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in]-R, R[$.

Q 4 Montrer que la fonction $f : \begin{cases}]-1, 0[\cup]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} \end{cases}$ admet un prolongement de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

Q 5 Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières $\sum nx^n$ et $\sum n^2 x^n$ (pour x réel).

Exercice 1:

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q 6 Montrer que M est semblable à la matrice blocs $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$.

Q 7 Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Q 8 En déduire que A et A' sont semblables et déterminer $P_1 \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P_1^{-1}AP_1 = A'$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Q 9 Déterminer P_1^{-1} et en déduire la valeur de A^n .

Q 10 Calculer B^n .

Q 11 Déduire des question précédentes la valeur de M^n (on pourra discuter suivant la parité de n).

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$.

On suppose que A est inversible.

Soit M la matrice définie par blocs par $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$

Q 12 Montrer qu'il existe $E \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telle que si $N = \left(\begin{array}{c|c} I_p & E \\ \hline 0 & I_q \end{array} \right)$ alors $M \times N$ est triangulaire par blocs de la forme $M \times N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{p,q} \\ \hline C & S \end{array} \right)$ avec $S \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Préciser les matrices E et S obtenues.

Q 13 En déduire que $\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$.

Problème 1

Dans tout l'énoncé de ce problème,

- I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine ($I =]-a, a[$ avec $a > 0$ ou $I = \mathbb{R}$)
- $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction paire, de classe C^∞ sur I .
- Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note (E) l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre en la fonction inconnue y de la variable réelle x suivante :

$$(E) : y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0$$

- On note f_0 l'unique solution de (E) sur I vérifiant les conditions $f_0(0) = 1$ et $f'_0(0) = 0$ et f_1 l'unique solution de (E) sur I vérifiant les conditions $f_1(0) = 0$ et $f'_1(0) = 1$.
- On note S_I l'ensemble des solutions de (E) sur I .

Les deux parties sont indépendantes.

Première partie:

Q 14 Montrer que si y est une solution de (E) sur I , alors y est de classe C^∞ sur I .

Q 15 Montrer que si y est une solution de (E) sur I , alors la fonction $z : x \mapsto y(-x)$ est aussi solution de (E) sur I .

Q 16 Montrer que f_0 est une fonction paire. On admet dans la suite que f_1 est une fonction impaire.

Q 17 Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide des fonctions f_0 et f_1 .

Q 18 On pose, pour $x \in I$, $w(x) = f_0(x)f'_1(x) - f'_0(x)f_1(x)$. Montrer que la fonction w est une fonction constante.

Q 19 On suppose que f_0 ne s'annule pas sur I et on pose $u = \frac{f_1}{f_0}$. Montrer que $u' = \frac{1}{f_0^2}$.

Q 20 On suppose que $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et la fonction $x \mapsto \cos^2(x)$ est solution de (E) sur I .

a Déterminer les fonctions φ et f_0 .

b Justifier que $\frac{1}{f_0^2(x)} = (1 + \tan^2(x))^2$ et utiliser le résultat de la question 19 pour en déduire f_1 .

Deuxième partie:

Dans cette partie, on suppose que $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $\omega > 0$. On se place dans le cas où la fonction φ est constante égale à ω^2 , ce qui revient à considérer que (E) est l'équation différentielle:

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: (E).$$

Q 21 Déterminer les solutions de l'équation (E) sur I . Préciser les fonctions f_0 et f_1 .

Q 22 Soit z une fonction de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et y la fonction définie sur I par: $\forall x \in I, y(x) = z(\sin(x))$. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$(E_0) : (1 - t^2) z''(t) - tz'(t) + \omega^2 z(t) = 0$$

Soit $R \in]0, 1[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. On suppose que la série entière $\sum a_n t^n$ est de rayon de convergence R et on pose, pour $t \in]-R, R[$, $z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Q 23 Montrer: z est solution de (E_0) sur $] -R, R[$ si et seulement si:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - \omega^2)a_n = 0.$$

Q 24 Montrer que si z est solution de (E_0) alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = \frac{a_0}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \omega^2)$.

Donner une expression de a_{2p+1} en fonction de p, ω et a_1 .

Dans la suite, on note z_0 la fonction z obtenue dans la question précédente pour $(a_0, a_1) = (1, 0)$ et z_1 la fonction z obtenue pour $(a_0, a_1) = (0, 1)$.

Q 25 On suppose que ω est un entier naturel pair, $\omega = 2q$. Montrer que z_0 est un polynôme. Quelles sont les solutions polynomiales de l'équation (E_0) ?

Q 26 Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_{2p} t^{2p}$ et $\sum a_{2p+1} t^{2p+1}$.

Q 27 Exprimer l'ensemble des solutions de (E_0) sur $] -1, 1[$ à l'aide des fonctions z_0 et z_1 .

Q 28 Exprimer, pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$ à l'aide des fonctions z_0 et z_1 .

Q 29 Soit m un nombre entier strictement positif.

Exprimer $\cos(2mx)$ et $\sin((2m+1)x)$, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, sous la forme $\cos(2mx) = P_m(\sin(x))$ et $\sin((2m+1)x) = Q_m(\sin(x))$ où P_m est une fonction polynomiale de degré $2m$ et Q_m une fonction polynomiale de degré $2m+1$ dont on précisera les coefficients.

Ces expressions sont-elles valides sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Problème 2:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 1: matrices triangulaires à diagonale nulle

Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [[1,n]]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $\forall (i,j) \in [[1,n]]^2, i \geq j \implies m_{i,j} = 0$.

Soit f l'application linéaire canoniquement associée à M et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour $k \in [[1,n]]$ soit F_k le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(e_1, \dots, e_k)$.

Q 30 Déterminer $f(F_1)$.

Q 31 Soit $k \in [[2,n]]$. Justifier que $f(F_k)$ est contenu dans F_{k-1} .

Q 32 En déduire que M^n est la matrice nulle.

Partie 2: matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit g l'application linéaire canoniquement associée à A et $b_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On suppose que A est nilpotente, c'est-à-dire que $\exists p \in \mathbb{N}^*, A^p = 0$.

Q 33 Justifier que $\dim(\text{Im}(g)) \leq n - 1$.

Q 34 En déduire qu'il existe $k \in [[1, n-1]]$, et $A' \in \mathcal{M}_{n-k, n-k}(\mathbb{R})$ et $B' \in \mathcal{M}_{n-k, k}(\mathbb{R})$ tels que A soit semblable à la matrice définie par blocs: $\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0_{n-k, k} & 0_{k, k} \end{array} \right)$.

Q 35 Montrer que $(A')^p = 0_{n-k, n-k}$.

Q 36 En déduire qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A et vérifiant:

$\forall (i,j) \in [[1,n]]^2, i \geq j \implies m_{i,j} = 0$.

Indication: on pourra raisonner par récurrence sur n .

Q 37 Montrer que $A^n = 0$

Partie 3: sous-espaces vectoriels contenant l'ensemble des matrices nilpotentes

On suppose que $n \geq 2$.

On note $(E_{i,j})_{(i,j) \in [[1,n]]^2}$ la famille des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$ et $N = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$

Q 38 Justifier que $N \subset H$.

Q 39 Montrer que N n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 40 Calculer $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2$.

Q 41 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant N .

Montrer que $F = H$ ou $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication: considérer $n^2 - n$ matrices élémentaires appartenant à N et les $n - 1$ matrices F_i définies par

$$F_i = -E_{1,1} - E_{i,1} + E_{1,i} + E_{i,i}, \text{ pour } 2 \leq i \leq n$$

Correction du DS 2

applications directes du cours

R 1 On a $\frac{3^{2n+1}}{n!} = 3 \times \frac{(3^2)^n}{n!}$ et $\sum \frac{(3^2)^n}{n!}$ converge et a pour somme e^{3^2} donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!}$ converge et a pour somme $3e^9$.

R 2 Posons $u_n = \frac{3^n}{n + \sqrt{n}} x^{2n}$. Pour $x \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 3 \frac{n + \sqrt{n}}{n + 1 + \sqrt{n+1}} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3x^2$.

Si $3x^2 < 1$ (soit $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$) alors la série converge et si $3x^2 > 1$ la série diverge donc $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

R 3 Pour $x \in]-1, 1[$, on a $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

pour $x \in]-1, 1[$, on a $\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 + (-1)^{n-1}) \frac{x^n}{n}$ et $(1 + (-1)^{n-1}) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

donc $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

R 4 La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc on peut prolonger f avec l'égalité $f(0) = 1$.

.Pour $x \in]-1, 1[$, on a $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ donc si $x \neq 0$, alors

$$f(x) = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}{x} = \frac{x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}.$$

Cette égalité est aussi vraie pour $x = 0$. On en déduit que f est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ donc sur $\mathbb{R}$.

R 5 Fait en cours.

Exercice 1:

R 6 Soit f canoniquement associée à M et $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Posons $e'_1 = e_1, e'_2 = e_3, e'_3 = e_2, e'_4 = e_4$. La famille $b' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et

$$\text{On a } \begin{cases} f(e_1) = 3e_1 + 2e_3 \\ f(e_3) = e_1 + 2e_3 \\ f(e_2) = e_4 \\ f(e_4) = e_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} f(e'_1) = 3e'_1 + 2e'_2 \\ f(e'_2) = e'_1 + 2e'_2 \\ f(e'_3) = e'_4 \\ f(e'_4) = e'_3 \end{cases}$$

$$\text{donc } \text{mat}_{b'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \text{ qui est donc semblable à } M.$$

R 7 Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

R 8 Soit g canoniquement associée à A et b_0 la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Posons $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La famille (U_1, U_2) est libre donc base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

D'après les questions précédentes, $g(U_1) = 4U_1$ et $g(U_2) = U_2$ donc $\text{mat}_{(U_1, U_2)}(g) = A'$ donc A et A' sont semblables si $P_1 = P_{b_0 \rightarrow (U_1, U_2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $P_1^{-1}AP_1 = A'$.

R 9 Le calcul de P_1^{-1} donne $P_1^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Or $A = PA'P^{-1}$ donc $A^n = (PA'P^{-1})^n = P(A')^n P^{-1}$

$$\text{donc } A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 4^n + 1 & 4^n - 1 \\ 2 \times 4^n - 2 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

R 10 On vérifie que $B^2 = I_2$. donc si n est pair, $n = 2p$, $B^n = B^{2p} = (B^2)^p = I_n$ et si n est impair, $n = 2p + 1$, $B^n = B^{2p} \times B = I_n \times B = B$

R 11 Par propriété du calcul par blocs, $(M')^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & 0 \\ \hline 0 & B^n \end{array} \right)$.

D'autre part $(M')^n = \text{mat}_{(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)}(f^n)$ et $M^n = \text{mat}_{(e_1, e_2, e_3, e_4)}(f^n)$

$$\text{Si } n \text{ est pair, } (M')^n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 4^n + 1 & 4^n - 1 \\ 2 \times 4^n - 2 & 4^n + 2 \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & I_2 \end{array} \right) \text{ donc } M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2 \times 4^n + 1) & 0 & \frac{1}{3}(4^n - 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(2 \times 4^n - 2) & 0 & \frac{1}{3}(4^n + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } n \text{ est impair, } (M')^n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 4^n + 1 & 4^n - 1 \\ 2 \times 4^n - 2 & 4^n + 2 \end{pmatrix} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \text{ donc } M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2 \times 4^n + 1) & 0 & \frac{1}{3}(4^n - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3}(2 \times 4^n - 2) & 0 & \frac{1}{3}(4^n + 1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

R 12 $MN = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_p & E \\ \hline 0 & I_q \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & AE + B \\ \hline C & CE + D \end{array} \right).$

Or $AE + B + 0 \Leftrightarrow AE = -B \Leftrightarrow E = -A^{-1}B$.

$$\text{Pour } E = -A^{-1}B, \text{ on a } CE + D = D - CA^{-1}B \text{ donc } MN = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_p & -A^{-1}B \\ \hline 0 & I_q \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & D - CA^{-1}B \end{array} \right).$$

R 13 On a $\det(M)\det(N) = \det(MN) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$ par la formule du déterminant triangulaire par blocs

De plus, $\det(N) = \det(I_p)\det(I_q) = 1$ par la formule du déterminant triangulaire par blocs.

On en déduit que $\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

Problème 1:

Première partie:

R 14 Soit y une solution de (E) sur I . Montrons par récurrence sur n que y est de classe C^n .

La fonction y est deux fois dérivable donc est de classe C^1 sur I .

Supposons y de classe C^n sur I pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors de $y'' = -\varphi \cdot y$, comme φ est de classe C^∞ , on déduit que y'' est de classe C^n donc y de classe C^{n+2} et donc aussi de classe C^{n+1} sur I .

Par récurrence sur n , y est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc de classe C^∞ sur I .

R 15 Soit $y \in S_I$. Comme I est symétrique par rapport à 0, on peut définir sur I la fonction $z : t \mapsto y(-t)$ et elle est de classe C^∞ sur I car y l'est. De plus, pour tout $t \in I$, $z'(t) = -y'(-t)$ et $z''(t) = y''(-t)$. Comme φ est une fonction paire, $\forall t \in I$, $z''(t) + \varphi(t)z(t) = y''(-t) + \varphi(-t)y(-t) = 0$. La fonction z est donc solution de (E) sur I .

R 16 Notons g_0 la fonction définie sur I par : $\forall t \in I$, $g_0(t) = f_0(-t)$. On a d'après la question précédente : $g_0(0) = f_0(0) = 1$, $g'_0(0) = -f'_0(0) = 0$ et $g_0 \in S_I$. D'après le théorème de Cauchy, il existe une unique solution de (E) sur I vérifiant ces conditions initiales : par conséquent $g_0 = f_0$ et la fonction f_0 est paire.

R 17 L'équation différentielle (E) est linéaire homogène du second ordre et la fonction φ est **continue** sur I **intervalle**: on sait alors que l'ensemble S_I des solutions de (E) sur I est un espace vectoriel de dimension 2. Or (f_0, f_1) est une famille de solutions de (E) sur I , de cardinal 2. et (f_0, f_1) est une famille libre : Pour tout $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a_0 f_0 + a_1 f_1 = 0$, en prenant la valeur en 0, $a_0 = 0$ puis comme f_1 n'est pas la fonction nulle, $a_1 = 0$. On en déduit que (f_0, f_1) est une base de S_I , ce que l'on peut encore traduire en disant que la solution générale de (E) est l'ensemble des fonction de la forme $f = a_0 f_0 + a_1 f_1$, avec $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$.

R 18 La fonction w est dérivable et $w'(t) = f'_0(t) f'_1(t) + f_0(t) f''_1(t) - f''_0(t) f_1(t) - f'_0(t) f'_1(t)$ donc $w'(t) = f_0(t) f''_1(t) - f''_0(t) f_1(t)$. Or f_0 et f_1 sont solutions de (E) donc $f''_i(t) = -\varphi(t) f_i(t)$. On en déduit que $w'(t) = 0$ sur l'intervalle I donc que w est une fonction constante.

R 19 La fonction $u = \frac{f_1}{f_0}$ est dérivable et $u' = \frac{w'}{f_0^2}$. D'après la question précédente, w est une fonction constante.

Or $w(0) = f_0(0) f'_1(0) - f'_0(0) f_1(0) = 1$ donc $u' = \frac{1}{f_0^2}$.

R 20 Soit $f : t \mapsto \cos^2(t)$ sur I . On a $\forall t \in I$, $f'(t) = -2 \sin t \cos t = -\sin(2t)$ et $f''(t) = -2 \cos(2t)$.

Comme f est solution de (E) et ne s'annule pas sur I on a $\forall t \in I$, $-2 \cos(2t) + \varphi(t) \cos^2(t) = 0$

donc $\varphi(t) = \frac{2 \cos(2t)}{\cos^2(t)} = \frac{2(\cos^2(t) - \sin^2(t))}{\cos^2(t)} = 2(1 - \tan^2(t))$. On remarque que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. Comme la solution de (E) vérifiant ces conditions initiales est unique, $f_0 = f$.

R 21 On a $\frac{1}{f_0^2(t)} = \frac{1}{\cos^4(t)} = (1 + \tan^2(t))^2 = 1 + \tan^2(t) + \tan^2(t)(1 + \tan^2(t))$.

Or $u'(t) = \frac{1}{f_0^2(t)}$ donc $u(t) = \frac{f_1}{f_0}(t) = \tan(t) + \frac{1}{3} \tan^3(t) + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $f_1(0) = 0$ donc $\lambda = 0$.

On a donc $\frac{f_1}{f_0}(t) = \tan(t) + \frac{1}{3} \tan^3(t)$ donc $f_1(t) = \cos^2(t) \left(\tan(t) + \frac{1}{3} \tan^3(t) \right) = \sin(t) \cos(t) + \frac{1}{3} \sin^2(t) \tan(t)$.

Deuxième partie:

R 22 Déterminer dans ce cas la solution générale de l'équation $(E) : y''(x) + \omega^2 y(t) = 0$ admet comme solutions les fonctions $x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ sur I . On vérifie que les fonction f_0 et f_1 sont $f_0 : x \mapsto \cos(\omega x)$ et $f_1 x \mapsto \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)$.

R 23 La fonction z est C^∞ sur $] -1, 1[$ donc la fonction y définie pour tout $x \in I$ par $y(x) = z(\sin(x))$ est C^∞ sur I .

De plus $y'(x) = \cos(x) \times z'(\sin(x))$ et $y''(x) = \sin(x) \times z'(\sin(x)) + \cos^2(x) \times z''(\sin(x))$ donc

y vérifie (E) sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, \sin(x) \times z'(\sin(x)) + \cos^2(x) \times z''(\sin(x)) + \omega^2 z(\sin(x)) = 0$

y vérifie (E) sur $I \Leftrightarrow \forall t \in] -1, 1[, tz'(t) + (1 - t^2) \times z''(t) + \omega^2 z(t) = 0$ car $t = \sin(x)$ décrit $] -1, 1[$ lorsque x décrit I .

R 24 On suppose que z est solution sur $] -1, 1[$ de $(E_0) : (1 - t^2) z''(t) - tz'(t) + \omega^2 z(t) = 0$ et z est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

La fonction z est donc de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et on peut dériver terme à terme:

$$z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ donc } z'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ donc } tz'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n \text{ car pour } n = 0, n a_n = 0. \text{ et}$$

$$z''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \text{ donc } t^2 z''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^n \text{ car pour } n = 1 \text{ et } n = 0,$$

$$n(n-1) a_n = 0.$$

De plus en effectuant le changement d'indice $k = n - 2$, $z''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$.

z est solution de $(E_0) \Leftrightarrow \forall t \in] -1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - n a_n + \omega^2 a_n] t^n = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n^2 - \omega^2) a_n] t^n = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 t^n.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, cette égalité équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1) a_{n+2} - (n^2 - \omega^2) a_n = 0.$$

R 25 Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+1) \neq 0$, $z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est solution de (E') si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{n^2 - \omega^2}{(n+2)(n+1)} a_n : (\mathcal{R})$$

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{2p} = \frac{(2(p-1))^2 - \omega^2}{(2p)(2p-1)} a_{2p-2} = \frac{(2(p-1))^2 - \omega^2}{(2p)(2p-1)} \frac{(2(p-2))^2 - \omega^2}{(2p-2)(2p-3)} a_{2p-4}$ et, de proche en proche,

$$a_{2p} = \frac{(2(p-1))^2 - \omega^2}{(2p)(2p-1)} \frac{(2(p-2))^2 - \omega^2}{(2p-2)(2p-3)} \cdots \times \frac{0 - \omega^2}{(0+2)(0+1)} a_0 \text{ soit}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p} = \frac{a_0}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \omega^2) : (1)$$

(on peut rédiger la récurrence: pour $p = 1$, $\frac{1}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \omega^2) a_0 = \frac{-\omega^2}{2} a_0 = a_2$).

Si l'égalité est vraie pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, alors

$$a_{2p+2} = \frac{(2p)^2 - \omega^2}{(2p+2)(2p+1)} a_{2p} = \frac{(2p)^2 - \omega^2}{(2p+2)(2p+1)} \times \frac{a_0}{(2p)!} \prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \omega^2) a_0 = \frac{a_0}{(2p+2)!} \cdot \prod_{k=0}^p (4k^2 - \omega^2)$$

L'égalité est vraie au rang $p+1$: la récurrence est établie).

De même, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p+1)!} \prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)^2 - \omega^2) : (2)$$

Réciproquement, une suite (a_n) vérifiant (1) et (2) vérifie $(\mathcal{R})$.

R 26 Si $\omega = 2q$ alors $a_{2q+2} = \frac{a_0}{(2p)!} \prod_{k=0}^q (4k^2 - \omega^2) = 0$ car $4q^2 - \omega^2 = 0$ et en utilisant $(\mathcal{R})$, $\forall p \geq q+1$, $a_{2p} = 0$ donc z_0 est une fonction polynôme de degré $2q$ (car $a_{2q} \neq 0$).

De même si $\omega = 2q+1$ alors $a_{2q+3} = \frac{a_1}{(2p+1)!} \prod_{k=0}^q ((2k+1)^2 - \omega^2)$ car $(2q+1)^2 - \omega^2 = 0$ et $\forall p \geq q+1$, $a_{2p+1} = 0$ donc z_1 est une fonction polynôme de degré $2q+1$ (car $a_{2q+1} \neq 0$). Dans ces deux cas, les relations (R) sont vérifiées et il n'y a pas de problème de convergence de la série entière qui est une somme finie.

R 27 Rayon de convergence de $\sum a_{2p} t^{2p}$ dans le cas où ω n'est pas un entier pair: on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} \neq 0$.

Posons $u_p = a_{2p} t^{2p}$. On a $\left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| = \left| \frac{(2p)^2 - \omega^2}{(2p+2)(2p+1)} t^2 \right| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} t^2$ donc si $|t| < 1$ alors $\sum a_{2p} t^{2p}$ converge et si $|t| > 1$ alors $\sum a_{2p} t^{2p}$ diverge. Le rayon de convergence est donc $R_0 = 1$.
On obtient le même résultat pour $\sum a_{2p+1} t^{2p+1}$.

R 28 La fonction z_0 est définie sur $] -1, 1[$ et ses coefficients vérifient les relations (R) donc est z_0 est solution de (E_0) (car le raisonnement fait en question 24 peut se faire par équivalence). De même z_1 est solution de (E_0) . L'équation (E_0) est homogène d'ordre 2 (coefficients continus et I intervalle) donc l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. La famille (z_0, z_1) est libre (prendre $t = 0$). On en déduit que les solutions de (E_0) sont les fonctions $z = a_0 z_0 + a_1 z_1$, avec $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$.

R 29 En posant $y(x) = z(\sin(x))$, si z est solution de (E_0) , alors y est solution de (E) .

Posons $g_0(x) = z_0(\sin(x))$. On a $g_0(0) = a_0 = 1$ et $g'_0(x) = \cos(x) z'_0(\sin(x))$ donc $g'_0(0) = z'_0(0) = a_1 = 0$ car $(a_0, a_1) = (1, 0)$ pour z_0 .

On en déduit grace au théorème de Cauchy que $g_0 = f_0$ donc que $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\cos(\omega x) = z_0(\sin(x))$.

De même $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\frac{\sin(\omega x)}{\omega} = z_1(\sin(x))$.

R 30 Soit m un nombre entier strictement positif. D'après Q 26, en prenant $\omega = 2m$, $\cos(2mx) = z_0(\sin(x))$ et si $\omega = 2m$, alors z_0 est une fonction polynôme P_m de degré $2m$. On a donc

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \cos(2mx) = P_m(\sin(x)), \text{ où } P_m = \sum_{k=0}^m \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (4k^2 - \omega^2)}{(2m)!} X^{2k}.$$

De même, $\frac{\sin((2m+1)x)}{\omega} = z_1(\sin(x))$ où z_1 est la fonction polynomiale lorsque $\omega = 2m+1$. En posant $Q_m =$

ωz_1 , on a $Q_m = \omega \sum_{k=0}^m \frac{\prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)^2 - \omega^2)}{(2m+1)!} X^{2k+1}$. En passant à la limite $\pm \frac{\pi}{2}$, l'égalité $\cos(2mx) = P_m(\sin(x))$ se prolonge sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. De plus, les fonction $x \mapsto \cos(2mx)$ et $x \mapsto P_m(\sin(x))$ sont π -périodique (car P_m est pair) donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2mx) = P_m(\sin(x))$. De même $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin((2m+1)x) = Q_m(\sin(x))$ (par prolongement par continuité et imparité).

Problème 2:

Partie 1: matrices triangulaires à diagonale nulle

R 31 La première colonne de A est nulle donc On a donc $f(e_1) = 0_E$ donc si $x \in F_1$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda e_1$ donc $f(x) = \lambda f(e_1) = 0_E$.
On a donc $f(F_1) = \{0_E\}$.

R 32 Si $j \in [[1, k]]$ alors $f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^{j-1} m_{i,j} e_i \in F_{j-1} \subset F_{k-1}$ car si $i \geq j$ alors $m_{i,j} = 0$.

Soit $x \in F_k$. On peut donc écrire x sous forme $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ et par linéarité $f(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(e_i) \in F_{k-1}$ donc $f(F_k) \subset F_{k-1}$.

R 33 Soit $x \in E = F_n$ D'après la question précédente, $f(x) \in F_{n-1}$ donc $f^2(x) = f(f(x)) \in F_{n-2}$ donc $f^3(x) = f(f^2(x)) \in F_{n-3}$...et de proche en proche, $f^{n-1}(x) \in F_1$ donc $f^n(x) \in \{0_E\}$. On a donc $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.
Or $A^n = \text{mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(f^n)$ donc $A^n = 0$.

Partie 2: endomorphismes nilpotents

R 34 La composée d'isomorphismes est un isomorphisme. Si g était un isomorphisme, on aurait g^p isomorphisme donc $g^p \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc g n'est pas un isomorphisme donc g n'est pas surjectif (car E est de dimension finie) donc $E \neq \text{Im}(g)$.

R 35 Soit F un supplémentaire de $\text{Im}(g)$ dans E et b_1 une base de $\text{Im}(g)$ et b_2 une base de F et $b = (b_1, b_2)$ la base de E obtenue par juxtaposition.

Posons $k = \dim(F) > 0$ d'après la question précédente.

Tout élément de la forme $u(x)$ est combinaison linéaire d'éléments de b_1 donc se décompose dans la base $b = (b_1, b_2)$ avec ses k dernières coordonnées nulles.

La matrice de u est donc de la forme $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0 & 0_{k,k} \end{array} \right)$, $A' \in \mathcal{M}_{n-k, n-k}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-k, k}(\mathbb{R})$.

R 36 On a $g^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $A_1^p = 0$. Or, par propriété du produit des matrices triangulaires par blocs, M_1^p est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A'^p & B'_p \\ \hline 0 & 0_{k,k} \end{array} \right)$ (à montrer par récurrence en utilisant les propriétés du produit par blocs) donc $A'^p = 0_{n-k, n-k}$ donc A' est nilpotente.

R 37 Montrons par récurrence **forte** sur n qu'il existe pour toute matrice A nilpotente de taille n une matrice M semblable à A qui vérifie $\forall (i, j) \in [[1, n]]^2, i \geq j \Rightarrow m_{i,j} = 0$.

Si $n = 1$ et $A^p = 0$ alors A est nulle car sinon aucune de ses puissances ne serait nulle. On peut prendre $M = A$.

Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour tout $i \in [[1, n-1]]$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^p = 0$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, il existe une base k entier strictement positif tel que A soit semblable à une matrice de la forme $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0 & 0_{k,k} \end{array} \right)$ avec $(A')^p = 0$.

$A' \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ et vérifiant $(A')^p = 0$ donc par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice M' vérifiant $m'_{i,j} = 0$ si $i \geq j$.

Soit $P_1 \in GL_{n-k}(\mathbb{R})$ telle que $P_1^{-1} A' P_1 = M'$ et, si $P = \left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right)$

alors $\left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-k} & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right) = I_n$ donc P est inversible et $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right)$.

On a $P^{-1} A_1 P = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline 0 & 0_{k,k} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I_k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A' P_1 & B' \\ \hline 0 & 0_{k,k} \end{array} \right)$.

Posons $M = P^{-1}A_1P = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1}AP_1 & P_1^{-1}B \\ \hline 0 & 0_{k,k} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} M' & P_1^{-1}B' \\ \hline 0 & 0_{k,k} \end{array} \right)$. On a bien $m_{i,j} = 0$ si $i \geq j$, et M est semblable à A_1 , qui est semblable à A donc M est semblable à A ce qui achève la récurrence

R 38 D'après la première partie on a $M^n = 0$ donc $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = 0$ donc $A^n = 0$.

Partie 3: sous-espaces vectoriels contenant l'ensemble des matrices nilpotentes

On suppose que $n \geq 2$. On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$ et $N = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$

R 39 Si $M^n = 0$ alors d'après la première partie, il existe une matrice M' semblable à M vérifiant $\forall (i, j), i \geq j \Rightarrow m'_{i,j} = 0$ et donc $\text{tr}(M) = \text{tr}(M') = 0$ donc $N \subset H$.

R 40 Pour $n = 2$, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = B^2 = 0$ donc $(A, B) \in N^2$ et $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc inversible donc $A+B \notin N$. Pour n quelconque, les matrices $A_n = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$ vérifient de même $(A_n, B_n) \in N^2$ (utiliser le produit par blocs) et $A_n + B_n \notin N$ donc N n'est pas un sous-espace vectoriel.

R 41 On a bien $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in N$.

On a $H = \ker(\text{tr})$ et $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle donc H est un hyperplan vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc de dimension $n^2 - 1$.

Soit F un sous-espace vectoriel contenant N .

La famille $(E_{i,j})_{i \neq j}$ est une famille libre de $n^2 - n$ éléments de N (car de carré nul) donc $E_{i,j} \in F$ et $E_{i,j} \in H$

La matrice $A_2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à N ($A_2^2 = 0$ d'après la question précédente et le produit par blocs).

Plus généralement, si $j \in [[2, n]]$, la matrice $A_i = -E_{1,1} - E_{i,1} + E_{1,i} + E_{i,i}$ est semblable à A_2 (faire un changement de base inversant le deuxième et le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base) et donc $A_i^2 = 0$ donc $A_i \in N$. donc $A_i \in F$ et $A_i \in H$.

Or la famille $\mathcal{F}$ obtenue par juxtaposition des familles $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n \text{ et } i \neq j}$ et $(A_i)_{2 \leq i \leq n}$ est libre:

Si $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=2}^n \beta_i A_i$ alors pour $i \geq 2$, $m_{i,i} = \beta_i$ donc $M = 0 \Rightarrow \forall i \in [[2, n]], \beta_i = 0$ donc $\sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0$ donc $\alpha_{i,j} = 0$ car les matrices élémentaires forment une famille libre.

On en déduit que $\dim(\text{vect}(\mathcal{F})) = n^2 - 1$. Les matrices de $\mathcal{F}$ appartiennent à H donc $\text{vect}(\mathcal{F}) \subset H$ et H est de dimension $n^2 - 1$ donc $\text{vect}(\mathcal{F}) = H$.

Les matrices de $\mathcal{F}$ appartiennent à F donc $\text{vect}(\mathcal{F}) \subset F$ donc $H \subset F$. et, comme H est de dimension $n^2 - 1$, $F = H$ ou $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

REMARQUES

Attention 1 règle de D'Alembert: *Implication! Pas équivalence*

Q1 évitez $\sum_{n=0}^{+\infty}$ avant d'avoir la CV. D'Alembert inutile car se ramène à une série connue

Q3 DSE de $\ln(1+x)$ commence par x !

Q4: Penser à $xf'(x)$ et $x^2f''(x)$ simplifie les calculs

Q10: $M^2 = 0 \implies \forall n \geq 2, M^n = 0$ mais $B^2 = I_n$ n'entraîne pas $\forall n \geq 2, M^n = 0$

Q13: préciser déterminant triangulaire par blocs

Q14: PAS DE CALCULS (sinon formule de Leibnitz?)

Q15: Pourquoi $y''(-x) + \dots$?

Q16 et 17: hypothèses des théorèmes?

Q18 $\int_0^x (1 + \tan^2(x))^2 dx$ avec $u = \tan(x)$

Q22 Expliquer le lien entre les intervalles de résolution

Q23

Ramener toutes les sommes à partir de 0

Ecrire $\forall x$ et $\forall n$ à certains endroits

Q24 le résultat est donné: faire une récurrence propre.

Q25: Quand une série entière est elle un polynôme?

Q30 confusion entre ensembles et vecteurs

Q31 et 32 Rédaction souvent à revoir

Q33. la composition d'isomorphismes est un isomorphisme

Q38 $tr(AB) \neq tr(A) \times tr(B)$ en général.