

Semaines 5 et 6

I Contenu

- Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice, polynôme caractéristique, multiplicité d'une valeur propre. Endomorphismes et matrices diagonalisables. Méthode de résolution d'un problème matriciel par changement de base, convergence dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par passage aux composantes. **Attention: les critères de diagonalisabilité utilisant les polynômes annulateurs ne sont pas à ce programme de colle.**
- espaces préhilbertiens réels: produit scalaire, Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, orthogonalité, procédé de Schmidt: révisions de première année

II Questions de cours

1. Révision du précédent programme de colle. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum n^2 x^n$ et calculer la somme de cette série entière.
2. x vecteur propre de f entraîne x vecteur propre de f^k .
3. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.
4. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer (sans passer par le polynôme caractéristique) que M est semblable à une matrice diagonale.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A quelle condition le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il vecteur propre de M ? Quelle est la valeur propre associée?
6. λ est valeur propre de f si et seulement si $\ker(f - \lambda Id) \neq \{0_E\}$. λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de f .
7. Si $x \mapsto a_{i,j}(x)$ est une fonction affine, alors $\det((a_{i,j}(x))_n)$ est un polynôme de degré au plus n .
8. Polynôme caractéristique: définition, degré, coefficient dominant (démonstration à l'aide de la question précédente), coefficient constant.
Valeur du coefficient de x^{n-1} (démonstration non demandée).
9. λ valeur propre de f si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de f .
10. Etudier les éléments propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. (distinguer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
11. Soit A une matrice diagonalisable. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est diagonalisable.
12. Les sous-espaces propres de f sont en somme directe. Si $n = \dim(E)$ alors f admet au plus n valeurs propres.
13. A quelle condition 0 est-il valeur propre de M ? Dans ce cas, exprimer $\dim(E_0(M))$ à l'aide du rang de M .
14. Définition d'un endomorphisme diagonalisable. (cinq formulations équivalentes).
15. Si f admet $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable. Que peut-on préciser?
16. Si f est nilpotente, alors $sp(f) = \{0\}$.
17. Définition de la multiplicité des racines d'un polynôme et caractérisation par les dérivées successives (énoncé).
Définition d'un polynôme scindé et caractérisation par les racines.
18. Montrer que $(X - 1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

19. Définition de la multiplicité d'une valeur propre. Si $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ de A alors $\sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} m(\lambda) \leq n$.
20. Donner un exemple de matrice de taille n pour laquelle $m(0) = n$ et $\dim(E_0(M)) = 1$.
21. Si $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ de f alors $\dim(E_\lambda(f)) \leq m(\lambda)$.
22. $m(\lambda) = 1 \Rightarrow \dim(E_\lambda(M)) = 1$.
23. Somme et produit des valeurs propres: énoncé seul. ATTENTION à l'hypothèse sur χ_f .
24. La matrice M est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique de M est scindé et pour toute valeur propre λ de M on a l'égalité $\dim(E_\lambda(M)) = m(\lambda)$.
25. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension impair admet au moins une valeur propre.
26. Pour des matrices de taille adaptées, si (A_n) converge vers A et (B_n) converge vers B alors $(A_n B_n)$ converge vers AB (continuité du produit matriciel) (on se limitera à des matrices 2-2 pour la démonstration).
27. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A .
28. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $M_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$. Montrer que la suite (M_n) converge et déterminer sa limite.
29. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est semblable à $\lambda I_n \Leftrightarrow M = \lambda I_n$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?
30. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que les sous-espaces propres de la matrice M sont de dimension 1.
31. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice M de la question précédente.
32. Définition d'un produit scalaire. Donner sans démonstration le développement de $\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i \mid \sum_{j=1}^q \mu_j v_j \right)$. Application au développement de $\left\| \sum_{i=0}^n u_i \right\|^2$.
33. Démontrer une identité de polarisation et l'identité du parallélogramme.
34. Donner sans démonstration l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'appliquer au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et au produit scalaire usuel de $C([a, b], \mathbb{R})$.
35. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels. Montrer que $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 \leq n \times (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$.
36. $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}^\perp = (\text{vect}(v_1, v_2, \dots, v_k))^\perp$.
37. Une somme de sous-espaces vectoriels orthogonaux est directe.
38. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $f_p(x) = \cos(px)$ Montrer que la famille (f_p) est une famille orthogonale de $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.
39. Démontrer le théorème de Pythagore (développement de $\left\| \sum_{i=0}^n u_i \right\|^2$ pour des vecteurs deux à deux orthogonaux).
40. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on pose $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$. Justifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de E . Appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) à partir de la famille (u_1, u_2, u_3) .