DM 5 pour le 16 octobre 2025

Exercice 1:

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y'(x) - 2xy(x) = 1$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, on pose $u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Q 1 *Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ en exprimant les solutions à l'aide de la fonction u.*

Q 2 *Justifier que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.*

Q 3 *Pour $x > 0$, on pose $v(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.*
Montrer que $v(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u(2x+u)} du$.
En déduire que $\forall x > 0$, $0 \leq v(x) \leq \dfrac{1}{2x}$, puis, que v admet une limite nulle en $+\infty$.

Q 4 *Justifier qu'il existe une et une seule solution de $(\mathcal{E})$ admettant une limite réelle en $+\infty$.*

Exercice 2:

Pour $x \in]-1, 1[$, si $x \neq 0$, on pose $u(x) = -\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

Partie 1: Etude de u et d'une de ses primitives

Q 5 *Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$.*

Q 6 *En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.*

Q 7 *Justifier que la fonction u admet un prolongement sur $]-1, 1[$ qui est de classe C^∞.*

Dans la suite, on pose $u(0) = \lim_{x \to 0} u(x)$ (on note donc encore u le prolongement de obtenu).

On note U l'unique primitive de u sur l'intervalle $]-1, 1[$ qui s'annule en 0.

Q 8 *Justifier que U est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et préciser ce développement.*

Q 9 *En déduire une expression de $U(x)$ pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$.*
(On pourrra faire une décomposition en éléments simples)
(On pourra exprimer $U(x)$ sous la forme $1 + \ln(1-x) \times v(x)$).

Partie 2: Application à l'étude de la suite (a_n)

Q 10 *Ecrire un fonction python* ***liste(n)*** *d'argument un entier naturel* n *qui renvoie la liste* $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Q 11 *Démontrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.

Q 12 *Justifier que le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *est supérieur ou égal à* 1.

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Q 13 *Montrer que pour* $x \in \left]-1,1\right[$, $f'(x) - u(x) f(x) = 0$.

Q 14 *En déduire une expression de* $f(x)$ *à l'aide de fonctions usuelles.*

Q 15 *Justifier que la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ *converge et calculer sa somme.*

Exercice 3:

Cet exercice est une illustration de la méthode de la base adaptée.

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par les relations suivantes :

$$\forall n \geq 1, \quad P_n(X) = X(X-1)\ldots(X-(n-1)) = \prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

Q 16 *Etablir que* $(P_0, P_1, \ldots, P_d)$ *est une base de* $\mathbb{R}_d[X]$.

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré d.

Q 17 *Déterminer le rayon de convergence* R_1 *de* $\sum P(n) x^n$ *et* R_2 *de* $\sum \dfrac{P(n)}{n!} x^n$.

Q 18 *Dans cette question* $P = X^3$. *Donner la décomposition de* P *dans la base* (P_0, P_1, P_2, P_3) *de* $\mathbb{R}_3[X]$.
En déduire la somme des séries entière $\sum P(n) x^n$ *et de* $\sum \dfrac{P(n)}{n!} x^n$ *dans leur intervalle ouvert de convergence.*

Q 19 *Dans cette question* P *est quelconque.*
Montrer qu'il existe un polynôme Q *de degré inférieur ou égal à* d d *tel que* $\forall x \in \left]-R_1 R_1\right[$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(n) x^n = \dfrac{Q(x)}{(1-x)^{d+1}}$.
Que peut-on dire de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)}{n!} x^n$ *?*

Exercice 4:

On se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivables et vérifiant:

$$(\mathcal{E}) : \forall x \in \mathbb{R}\ , f''(x) - f(-x) = \cos(x) + x$$

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

Q 20 *Justifier qu'il existe un et un unique couple* (g, h) *de fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$f = g + h,$$

$$g \text{ est paire et } h \text{ est impaire,}$$

$$g \text{ et } h \text{ sont deux fois dérivables sur } \mathbb{R}.$$

Q 21 *On suppose* f *décomposé sous forme* $g + h$ *comme dans la question précédente.*
Montrer que f *est solution de* $(\mathcal{E})$ *si et seulement si* g *est solution d'une équation différentielle* $(\mathcal{E}_1)$ *et* h *est solution d'une équation différentielle* $(\mathcal{E}_2)$ *(on précisera les équations* $(\mathcal{E}_1)$ *et* $(\mathcal{E}_2)$*).*

Q 22 *En déduire les solutions de* $(\mathcal{E})$*.*

Correction:

Exercice 1:

R 1 *D'après le cours, les solutions de* $(\mathcal{H}) : y'(x) - 2xy(x) = 0$ *sont les fonctions* $x \mapsto \lambda e^{x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Posons $y(x) = \lambda(x) y_0(x)$ *avec* $y_0(x) = e^{x^2}$. *La fonction* y *est solution de* $(\mathcal{E})$ *si et seulement si* $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) y_0(x) = 1$ *soit* $\lambda'(x) = e^{-x^2}$. *On obtient donc une solution particuliere en prenant* $\lambda = u$.
Les solutions de $(\mathcal{E})$ *sont donc les fonctions* $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

R 2 *La fonction* $t \mapsto e^{-t^2}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *et* $\dfrac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 e^{-t^2} \to_{t\to+\infty} 0$ *donc*

- $e^{-t^2} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *est convergente* $\qquad$ *donc* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *est convergente*
- $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$ *si* $t \geq 1$

R 3 *On a* $v(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} e^{x^2 - t^2} dt = \int_x^{+\infty} e^{(x-t)(x+t)} dt$.
On pose $u(t) = t - x$ *fonction affine (bijection strictement croissante de* $[x, +\infty[$ *sur* $[0, +\infty[$.
On a $v(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u(2x+u)} du$.
Or $0 \leq e^{-u(2x+u)} = e^{-2xu-u^2} = e^{-u^2} e^{-2xu} \leq e^{-2xu}$ *car* $u \geq 0$ *donc (comme* $\int_0^{+\infty} e^{-2xu} du$ *est convergente si* $x > 0$*)*
$0 \leq v(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-2xu} du = \dfrac{1}{2x}$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 0$.

R 4 *Une solution de* $(\mathcal{E})$ *est* $y : x \mapsto e^{x^2}\left(\lambda + \int_0^x e^{-t^2} dt\right)$ *avec* λ *constante réelle.*

- *Si* $\lambda \neq -\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lambda + \int_0^x e^{-t^2} dt\right) = \lambda + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \neq 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \pm\infty$.

- *Si* $\lambda = -\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *alors* $y(x) = e^{x^2}\left(-\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_0^x e^{-t^2} dt\right) = -e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *qui a pour limite* 0 *en* $+\infty$ *d'après la question précédente.*

Exercice 2

Partie 1: Etude de u et d'une de ses primitives

R 5 *Soit* $x \in]-1, 1[\backslash 0$. *On a* $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$

R 6 *donc* $u(x) = -\dfrac{x - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}{x^2} = \dfrac{-\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}}{x^2} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^{n-2}}{n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

R 7 *La fonction* $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$ *est développable en série entière sur* $]-1, 1[$ *et prolonge* u *en* 0 *(avec la valeur* $\frac{1}{2}$*).*

R 8 *Le théorème d'intégration terme à terme des séries entières s'applique sur* $]-1, 1[$ *à la fontion* u *donc*
$U(x) = U(0) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)}$ *donc* $U(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+2)(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)n}$.

R 9 *Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, si $x \neq 0$,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} && = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= -\ln(1-x) + \frac{1}{x}\left(\ln(1-x) + x\right) && = 1 + \ln(1-x)\frac{1-x}{x}
\end{aligned}$$

donc $U(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \ \text{si } x = 0 \\ 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x) \ \text{si } x \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\} \end{array} \right.$.

Partie 2: Application à l'étude de la suite (a_n)

R 10 *On peut écrire:*

```
def liste(n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        S=0
        for j in range(len(L)):
            S=S+L[j]/(i-j+2)
        L.append(S/(i+1))
    return L
```

R 11 *Montrons par récurrence forte sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$ (HR_n).*
Initialisation : *Par hypothèse, $a_0 = 1 \in]0,1]$, donc on a bien HR_0.*
Hérédité : *Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in [[0,n]]$.*
Alors

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+2} \qquad \text{(d'après } HR_k \ a_k \leq 1 \text{ pour } 0 \leq k \leq n\text{) donc}$$

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1 \text{ car si } n-k+2 \geq 2 \geq 1 \text{ donc } \frac{1}{n-k+2} \leq 1 \text{ et}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} > 0 \qquad \text{(d'après } HR_k,\ a_k > 0 \text{ pour } 0 \leq k \leq n\text{)}$$

donc on a bien HR_{n+1}.
Conclusion : *D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.*

R 12 *On a $|a_n| \leq 1$ donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à celui de la série entière $\sum x^n$ donc $R \geq 1$.*

R 13 *Les deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, donc le produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ de ces deux séries entières, a aussi un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.*
De plus, par définition du produit de Cauchy de deux séries (entières),

on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\times\frac{1}{n-k+2}=(n+1)a_{n+1}$.
On en déduit que pour $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f(x)\times u(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}w_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\ &= f'(x) \text{ (th de dérivation terme à terme des SE)}\end{aligned}$$

donc $\forall x\in\,]-1,1[,\ f'(x)-u(x)f(x)=0$.

R 14 *La fonction* f *vérifie l'équation différentielle* $y'-u(x)y=0:(\mathcal{E})$. *La fonction* u *est continue (car* C^∞*) sur* $]-1,1[$ *donc l'ensemble des solutions de* $(\mathcal{E})$*.est l'ensemble des fonction* $x\mapsto\lambda e^{U(x)}$ *ou* U *est la primitive de* u *donnée par* $U(x)=\left\{\begin{array}{c}0 \text{ si } x=0\\ 1+\ln(1-x)\times\frac{1-x}{x}\text{ si } x\neq0\end{array}\right.$.
La valeur de λ *correspondant à la solution* f *est obtenue par l'égalité* $f(0)=a_0=1$ *donc* $\lambda=1$. *On en déduit que*
si $x\neq0$ $f(x)=e^{\left(1+\ln(1-x)\frac{1-x}{x}\right)}=e(1-x)^{\frac{1-x}{x}}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ e(1-x)^{\frac{1-x}{x}} & \text{si } x\in\,]-1,1[\setminus\{0\}\end{cases}.$$

R 15 *Comme* $1/2\in]-1,1[$ *est à l'intérieur du disque ouvert de convergence de* $\sum_{n\geq0}a_nx^n$, $\sum_{n\geq0}\frac{a_n}{2^n}$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{2^n}=f\left(\frac12\right)=a\left(1-\frac12\right)^{\frac{1-1/2}{1/2}}=\frac{e}{2}.$$

Exercice 3:

R 16 *On a* $\deg(P_i)=i$ *donc* $(P_0,P_1,\ldots,P_d)$ *est libre et est formée de* $d+1=\dim(\mathbb{R}_d[X])$ *vecteurs donc est une base de* $\mathbb{R}_d[X]$.

R 17 *Soit* P *un polynôme à coefficients réels de degré* d, $P=\sum\limits_{i=0}^{d}a_iX^i$.
On a $P(n)\sim_{n\to\infty}a_dn^d$. *Le rayon de convergence de* $\sum n^dx^n$ *est égal à* 1 *d'après le cours donc le rayon de convergence de* $\sum P(n)x^n$ *est égal à* $R_1=11$

R 18 *On a* $X^2=X(X-1)+X$ *donc* $X^3=X(X-1)\times(X-2+2)+X\times(X-1+1)$ *donc*
$X^3=X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+X=P_3+3P_2+P_1$.
Posons $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. *On a* $\forall x\in\,]-1,1[,\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ *et* $P_0=1$ *donc* $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P_0(n)x^n$.
Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières donne que pour tout $x\in\,]-1,1[$,
$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$ *donc* $xf'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^n$ *et* $P_1=X$ *donc* $xf'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P_1(n)x^n$.
$f''(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$ *donc* $x^2f''(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(n-1)x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P_2(n)x^n$.
$f^{(3)}(x)=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ *donc*

$x^3 f^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P_3(n)x^n$.
On en déduit que, pour $x \in]-1,1[$,
$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (P_3 + 3P_2 + P_1)(n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P_3(n)x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} P_2(n)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} P_1(n)x^n$
d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3x^n = x^3f^{(3)}(x) + 3x^2f''(x) + xf'(x)$ *et*
On a $f(x) = (1-x)^{-1}$ *donc* $f'(x) = (-1)\times(-1)\times(1-x)^{-2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ *donc*
$f''(x) = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-2)(1-x)^{-3} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ *donc*
$f^{(3)}(x) = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-2)\times(-1)\times(-3)(1-x)^{-4} = \dfrac{6}{(1-x)^4}$.
On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3x^n = x^3f^{(3)}(x) + 3x^2f''(x) + xf'(x) = \dfrac{6x^3}{(1-x)^4} + \dfrac{6x^2}{(1-x)^3} + \dfrac{x}{(1-x)^2}$.
De même, pour $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^3}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}(P_3 + 3P_2 + P_1)(n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_3(n)}{n!}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_2(n)}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_1(n)}{n!}x^n$.
Or
$\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_1(n)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}x^{n+1} = xe^x$
$\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_2(n)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n\times(n-1)}{n!}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n\times(n-1)}{n!}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-2)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}x^{n+2} = x^2e^x$
$\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_3(n)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{n!}x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{n!}x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-3)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}x^{n+3} = x^3e^x$
donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^3}{n!}x^n = (x^3 + 3x^2 + x)e^x$.

R 19 *On obtient en dérivant i fois la fonction* f *que* $f^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-i+1)x^{n-i}$ *donc*
$x^if^{(i)}(x) = \sum_{n=i}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-i+1)x^n = \sum_{n=i}^{+\infty} P_i(n)x^n$ *et* $\forall n \in [[1, i-1]]$, $P_i(n) = 0$ *donc*

$$x^if^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_i(n)x^n.$$

Or $(P_0, P_1, \ldots, P_d)$ *est une base de* $\mathbb{R}_d[X]$ *donc il existe des réels* $b_0, \ldots, b_d$ *tels que* $P = \sum_{i=0}^{d} b_iP_i$.
On en déduit que si $x \in]-1,1[$, *alors* $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{d} b_iP_i(n)\right)x^n = \sum_{i=0}^{d}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_iP_i(n)x^n\right)$ *car toutes les séries convergent (déjà vu).*
On en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \sum_{i=0}^{d} b_ix^if^{(i)}(x)$.
On a $f(x) = (1-x)^{-1}$ *donc* $f'(x) = (-1)\times(-1)\times(1-x)^{-2}$ *donc*
$f''(x) = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-2)(1-x)^{-3}$ *donc*
$f^{(x)}(x) = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-2)\times(-1)\times(-3)(1-x)^{-4}$.
Par récurrence immédiate, $\forall i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}(x) = i!(1-x)^{-(i+1)} = \dfrac{i!}{(1-x)^{i+1}}$.
On en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \sum_{i=0}^{d} b_ix^if^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^{d} b_ix^i\dfrac{i!}{(1-x)^{i+1}} = \dfrac{\sum_{i=0}^{d} i!b_ix^i(1-x)^{d-i}}{(1-x)^{d+1}} = \dfrac{Q(x)}{(1-x)^{d+1}}$ *avec*

$Q=\sum_{i=0}^{d} i!b_iX^i\left(1-X\right)^{d-i}$ *somme de polynômes de degré* d *donc de degré inférieur ou égal à* d.

On procède de même pour le calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{P\left(n\right)}{n!}x^n$:

On a $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{P\left(n\right)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\sum_{i=0}^{d} b_iP_i\left(n\right)}{n!}x^n=\sum_{i=0}^{d} b_i\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{P_i\left(n\right)}{n!}x^n$ *(valable car chaque série converge) et* $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{P_i\left(n\right)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n\left(n-1\right)\cdots\left(n-i+1\right)}{n!}x^n=\sum_{n=i}^{+\infty}\dfrac{n\left(n-1\right)\cdots\left(n-i+1\right)}{n!}x^n=\sum_{n=i}^{+\infty}\dfrac{1}{\left(n-i\right)!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}x^{n+i}=x^ie^x$.

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{P\left(n\right)}{n!}x^n=\sum_{i=0}^{d} b_i\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{P_i\left(n\right)}{n!}x^n=\sum_{i=0}^{d} b_ix^ie^x=\left(\sum_{i=0}^{d} b_ix^i\right)e^x$ *d'où le résultat.*

Exercice 4:

R 20 *On raisonne par analyse-synthèse:*
Supposons $f = g + h$ *et* f *est paire et* g *est impaire. alors* $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{l} g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{array}\right.,$$
ce qui entraîne l'unicité du couple (f, g).
Réciproquement, si $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ *et* $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, *on vérifie que* $f = g + h$, g *est paire et* h *est impaire.*
De plus, comme f *est deux fois dérivable,* $x \mapsto f(-x)$ *l'est aussi et donc* g *et* h *le sont aussi.*

R 21 *On a*

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) &\Leftrightarrow g''(x) + h''(x) - g(-x) - h(-x) = \cos(x) + x \\ &\Leftrightarrow g''(x) - g(x) - \cos(x) = -h''(x) - h(x) + x \end{aligned}$$

Or donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$ *donc en dérivant (*$x \mapsto g(-x)$ *est dérivable déjà vu)* $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -g'(-x)$.
Autrement dit, la dérivée d'une fonction paire est impaire et, de même la dérivée d'une fonction impaire est paire.
On en déduit que g'' *est paire et* h'' *est impaire donc* $x \mapsto g''(x) - g(x) + \cos(x)$ *est paire et* $x \mapsto -h''(x) - h(x) + x$ *est impaire.*
Une fonction u *qui est paire et impaire est nulle (*$u(-x) = u(x) = -u(x)$*) donc*

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} g''(x) - g(x) - \cos(x) = 0 : (\mathcal{E}_1) \\ -h''(x) - h(x) + x : (\mathcal{E}_2) \end{array}\right.$$

R 22 *Les solutions de* $(\mathcal{H}_1)$ *sont les fonctions* $x \mapsto A\sinh(x) + B\cosh(x)$ *donc On peut chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_1) : g''(x) - g(x) = \cos(x)$ *sous forme* $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ *et on trouve que* $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(x)$ *est solution donc* g *vérifie* $(\mathcal{E}_1)$ *si et seulement si* $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = A\sinh(x) + B\cosh(x) - \frac{1}{2}\cos(x)$.
Or g *est paire donc* $A = 0$ *(* $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = g(-x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $-A\sinh(x) = A\sinh(x) \Leftrightarrow A = 0$ *car* $\sinh$ *n'est pas identiquement nulle).*
Les solutions de $(\mathcal{H}_2)$ *sont les fonctions* $x \mapsto C\sin(x) + D\cos(x)$ *donc on peut chercher une solution particulière de* $(\mathcal{E}_2) : h''(x) + h(x) = x$ *sous forme* $x \mapsto ax + b$ *et on trouve que* $x \mapsto x$ *est solution donc* h *vérifie* $(\mathcal{E}_2)$ *si et seulement si* $\exists (C, D) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}\ h(x) = C\sin(x) + D\cos(x) + x$.
Or h *est impaire donc* $D = 0$ *(* $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = -h(-x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $D\cos(x) = -D\cos(x) \Leftrightarrow D = 0$ *car* $\cos$ *n'est pas identiquement nulle).*
On en déduit que si f *vérifie* $(\mathcal{E})$ *alors* $\exists (A, C) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}\ h(x) = B\cosh(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + +C\sin(x) + x$.
Réciproquement, on vérifie que $h''(x) - h(-x) = x + \cos x$.