

PSI DM6 pour le 3 novembre

EXERCICE 1: Exemple de trigonalisation de matrice

Q 1 Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Q 2 Déterminer le rang de A . En déduire que la matrice A n'est pas diagonalisable? (On citera précisément le résultat de cours utilisé.)

Q 3 Déterminer les sous-espaces propres de A . Un notera U_2 l'unique vecteur propre associé à la valeur propre 0 de première composante égale à 1.

Q 4 Déterminer un vecteur U_3 vérifiant $AU_3 = U_2$.

Q 5 Déterminer un vecteur U_1 tel que (U_1, U_2, U_3) soit une base dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à A admette une matrice triangulaire supérieure.

EXERCICE 2:

Première partie

Dans cette partie, a et b sont deux réels fixés, $a \neq 1$. On considère une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par un terme initial u_0 et vérifiant la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Q 6 Expression de u_n :

a Déterminer un réel k tel que la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - k$ soit géométrique.

b En déduire une expression de u_n en fonction de u_0 et n .

Pour z complexe, on définit, lorsque la série converge, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$.

Q 7 Rayon de convergence

a On suppose que $k = 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$.

b On suppose que $u_0 \neq \frac{b}{1-a}$ et $k \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$.

c On suppose que $u_0 = \frac{b}{1-a}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$.

d On pose $\rho = \min\left(1, \frac{1}{|a|}\right)$. Justifier que si $|z| < \rho$ alors $S(z)$ est défini.

Q 8 On suppose que $|z| < \rho$. En partant de la relation évidente $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - au_n - b) z^n = 0$, montrer que

$$S(z) = \frac{u_0}{1-az} + \frac{bz}{(1-z)(1-az)}.$$

Pour x réel, on définit, lorsque la série converge, $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

Q 9 Déterminer le rayon de convergence ρ_G de la série entière $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$.

Q 10 En partant de la relation évidente $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u_{n+1} - au_n - b)}{n!} x^n = 0$, montrer que G vérifie une équation différentielle du premier ordre sur l'intervalle $]-\rho_G, \rho_G[$. En déduire une expression de $G(x)$ en fonction de x .

Q 11 Justifier que G est de classe C^∞ sur $]-\rho_G, \rho_G[$ et exprimer $G^{(n)}(x)$ pour $x \in]-\rho_G, \rho_G[$ et $n \in \mathbb{N}$. Retrouver le résultat de la question 2.

Deuxième partie: utilisation de série entière pour le calcul du terme général d'une suite

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

Q 12 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq n!$.

Q 13 En déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est strictement positif.

Pour $x \in]-R, R[$, on pose, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Q 14 Pour $x \in]-R, R[$, exprimer $f^2(x)$ en fonction de $f'(x)$.

Q 15 En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$.

Q 16 Exprimer a_n en fonction de n .

EXERCICE 3:

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

Q 17 Calculer le déterminant de A . Déterminer le rang de A .

Q 18 Calculer le polynôme caractéristique P de la matrice A . Préciser $P(-1)$. Déterminer le spectre de la matrice A .

Q 19 Justifier que si P admet trois racines distinctes si et seulement si $a \notin \left\{1, -2, -\frac{1}{2}\right\}$.

En déduire que si $a \notin \left\{1, -2, -\frac{1}{2}\right\}$ alors A est diagonalisable.

Q 20 On suppose que $a = 1$. Préciser $\text{sp}(A)$ et $\text{rg}(A + I_3)$. En déduire que A est diagonalisable.

Q 21 On suppose que $a = 2$. Préciser $\text{sp}(A)$ et $\text{rg}(A + I_3)$. En déduire que A n'est pas diagonalisable.

Q 22 On suppose que $a = -\frac{1}{2}$. La matrice A est-elle diagonalisable?

EXERCICE 4:

On considère l'équation différentielle $(1 - x^2) y'(x) - xy(x) = 1 : (\mathcal{E})$ et un réel $R > 0$.

Q 23 Résoudre l'équation homogène $(1 - x^2) y'(x) - xy(x) = 0 : (\mathcal{H})$ sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Q 24 Déterminer une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $] -1, 1[$ à l'aide de la méthode de variation de la constante. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Q 25 Soit $\sum a_n x^{2n+1}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

On pose, pour $x \in] -R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

1. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $(a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)a_{n+1} = (2n+2)a_n)$.

2. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Q 26 Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\text{Arc sin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et préciser ce développement.

EXERCICE 5:

• Soit $a_1, \dots, a_{n-1}$ des réels, $a_1 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

• On pose $F = \text{vect}(e_n, f(e_n))$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$.

Q 27 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .

Montrer que la matrice A est diagonalisable et déterminer les sous-espaces propres de A .

Q 28 Déterminer le rang de M .

Q 29 Montrer que F est stable par f .

Q 30 Soit g l'endomorphisme induit par f sur F .

Justifier que $(e_n, f(e_n))$ est une base de F et déterminer la matrice de g dans cette base.

Justifier que g est un isomorphisme.

Q 31 Justifier que $\{-\lambda, \lambda\} \subset \text{sp}(f)$ et donner un vecteur propre de f associé à λ et à $-\lambda$.

Q 32 En déduire que f est diagonalisable.

Q 33 Déterminer une base de $\ker(f)$.

Q 34 Déterminer une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P_3^{-1}MP$ est diagonale.

PROBLEME:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$$\text{On pose } K_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{C}).$$

On pose, $k \in [[0, n-1]]$, $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.

Première partie: Puissances de K_n , éléments propres de K_n et application

Q 35 Soit f_n l'endomorphisme canoniquement associé à K_n et $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Déterminer, pour $j \in [[1, n]]$ l'image de E_j par f_n^2 . En déduire la matrice K_n^2 .
Soit $i \in [[1, n]]$. Déterminer, pour $j \in [[1, n]]$ l'image de E_j par f_n^i . En déduire la matrice K_n^i .

Q 36 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de K_n et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. En calculant de deux manières $K_n^n \times X$, montrer que $\lambda^n = 1$.
En déduire que $\text{sp}(K_n) \subset \{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$

Q 37 Déterminer le polynôme caractéristique de K_n . En déduire que $\text{sp}(K_n) = \{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$ et que K_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Préciser la dimension des sous-espaces propres.

Q 38 Déterminer le sous-espace propre de K_n associé à la valeur propre ω_k . On notera U_k un vecteur propre de K_n de première composante 1.

Q 39 Donner une matrice $P_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telle que

$$P_n^{-1} K_n P_n = D_n$$

Soit $f : \mathcal{M}_{7,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{7,1}(\mathbb{C})$ l'endomorphisme canoniquement associé à M et $(E_1, \dots, E_7)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{7,1}(\mathbb{C})$.

Q 40 Montrer que le sous-espace vectoriel $\text{vect}(E_1, E_3, E_5)$ est stable par f .

Q 41 Montrer que la matrice M est semblable à la matrice diagonale par blocs $\left(\begin{array}{c|c} K_3 & 0 \\ \hline 0 & K_4 \end{array} \right)$.

Q 42 Justifier que la matrice $\left(\begin{array}{c|c} P_3 & 0 \\ \hline 0 & P_4 \end{array} \right)$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide des matrices P_3 et P_4 .

Q 43 Montrer que la matrice M est semblable dans $\mathcal{M}_7(\mathbb{C})$ à une matrice diagonale à préciser.

Deuxième partie:

On pose $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. et H le sous-espace vectoriel de E d'équation $z_1 + \dots + z_n = 0$. On pose $B = \frac{1}{2}(I_n + K_n)$.

Q 44 Justifier que pour $k \in [[0, n-1]]$, le vecteur U_k est un vecteur propre de B .

Q 45 Montrer que $(U_1, \dots, U_{n-1})$ est une base de H .

Q 46 Montrer que si $Z \in H$, alors la suite $(B^p Z)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $0_{\mathbb{C}^n}$. (On pourra utiliser la question précédente).

On considère un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A tout point M de coordonnées (x, y) , on associe le complexe $z_M = x + iy$ appelé affixe de M . Si M et N sont deux points du plan, le milieu du segment $[MN]$ est le point d'affixe $\frac{1}{2}(z + z')$. On considère un polygone $\mathcal{P}_0$ à n sommets $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ du plan. On note z_i , l'affixe du point A_i . Le centre du polygone est le point d'affixe $\frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$ et on suppose que ce centre est le point O . On définit par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ le polygone $\mathcal{P}_k = (P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, \dots, P_n^{(k)})$ de la manière suivante:

- Pour $i \in [[1, n]]$, on a $P_i^{(0)} = A_i$

- Le point $P_1^{(k+1)}$ est le milieu du segment $[P_n^{(k)}, P_1^{(k)}]$ et pour $i \in [[2, n]]$ le point $P_i^{(k+1)}$ est le milieu du segment $[P_{i-1}^{(k)}, P_i^{(k)}]$.

Q 47 Représenter les polygones $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ sur une figure lorsque $n = 3$ et $\mathcal{P}_0$ est le triangle de sommets les points d'affixes respectives $1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Q 48 Soit $r > 0$. Montrer qu'il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, le polygone $\mathcal{P}_k$ est à l'intérieur du disque de centre O et de rayon r .

Troisième partie: Déterminant circulant

Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & & \ddots & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

Q 49 Exprimer la matrice A comme combinaison linéaire des matrices $I_n, K_n, K_n^2, \dots, K_n^{n-1}$.

Q 50 En déduire que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et préciser une matrice diagonale semblable à A .

Q 51 En déduire que $\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega_k^i \right)$.

Correction du DM6

EXERCICE 1:

R 1 On obtient $\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = x^2(x+1)$. et donc $\text{sp}(A) = \{0, -1\}$.

R 2 La valeur $\lambda = 0$ est une valeur propre de A donc $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(A - 0I_3)) \geq 1$ donc par le th du rang, $\text{rg}(A) \leq 2$. Or sa famille de colonnes (C_2, C_3) est libre donc $\text{rg}(A) \geq 2$ donc $\text{rg}(A) = 2$. On en déduit que $\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A)) = 1$. On a donc $\dim(E_0(A)) = 1 < m(0) = 2$ (multiplicité de la valeur propre 0) donc la matrice A n'est pas diagonalisable car A est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et pour tout $\lambda \in \text{sp}(A)$, on $\dim(E_\lambda(A)) = 1 < m(\lambda)$.

R 3 On vérifie que $E_{-1}(A) = \text{vect}(U_1)$ et $E_0(A) = \text{vect}(U_2)$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

R 4 Si $U_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $AU_3 = U_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + 2c = 1 \\ 10a - 5b + 7c = 2 \\ 4a - 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b + 2c = 1 \\ -3c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow U_3 = \begin{pmatrix} a \\ 2a+1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En prenant $a = 0$ on obtient par exemple $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

R 5 Soit B_0 la une base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $\det_{B_0}(U_1, U_2, U_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $B = (U_1, U_2, U_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Si f est canoniquement associé à A , on a $f(U_1) = AU_1 = -U_1$, $f(U_2) = AU_2 = 0$ et $f(U_3) = AU_3 = U_2$ donc $\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$ et donc $T = P^{-1}AP$ avec $P = P_{B_0}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2:

Première partie (D'après centrale 2008 PSI)

R 6 On remarque que $x = ax + b \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a} = k$. car $a \neq 1$. On a donc $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ k = ak + b \end{cases}$. On a donc $u_{n+1} - k = a(u_n - k)$ donc la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - k$ est géométrique. On en déduit que $v_n = a^n v_0$ donc $u_n = k + a^n(u_0 - k)$.

R 7 Rayon

a Si $b = 0$, alors $u_n = a^n u_0$. Si $u_0 = 0$, alors $R = +\infty$ et si $u_0 \neq 0$ alors $\sum u_n z^n = \sum u_0 (az)^n$ converge si et seulement si $|az| < 1$. donc $R = \frac{1}{|a|}$.

b Si $u_0 \neq k$ alors

- si $|a| > 1$ alors $u_n = k + a^n(u_0 - k) \sim_{n \rightarrow +\infty} a^n(u_0 - k)$ et $\sum a^n(u_0 - k) z^n$ a même rayon de convergence (égal à $\frac{1}{|a|}$) donc $R = \frac{1}{|a|}$.

- si $|a| < 1$ alors $u_n = k + a^n(u_0 - k) \sim_{n \rightarrow +\infty} k$ et $\sum a^n(u_0 - k) z^n$ a même rayon de convergence (égal à $\frac{1}{|a|}$) donc $R = \frac{1}{|a|}$.

- si $a = -1$ alors $u_n = k + (-1)^n(u_0 - k)$ donc $u_{2p} = k + (u_0 - k)$ et $u_{2p+1} = k - (u_0 - k)$ donc $R = 1$.

c Si $u_0 = \frac{b}{1-a} = k$. On a donc $\forall n, u_n = k$. Si $k = 0$ alors $R = +\infty$ et si $k \neq 0$ alors $R = 1$.

d Si $\rho = \min\left(1, \frac{1}{|a|}\right)$ alors d'après les questions précédentes, $\rho < R$ donc si $|z| < \rho$ alors $S(z)$ est défini.

R 8 Soit $|z| < \rho$. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - au_n - b)z^n = 0$ or si $z \neq 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}z^n = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}z^{n+1} = \frac{S(z) - u_0}{z}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} bz^n = \frac{b}{1-z}$ donc $\frac{S(z) - u_0}{z} - aS(z) - \frac{b}{1-z} = 0$ d'où $\frac{S(z) - azS(z)}{z} = \frac{u_0}{z} + \frac{b}{1-z}$ donc $S(z) = \frac{u_0}{1-az} + \frac{bz}{(1-z)(1-az)}$. Cette égalité est aussi vraie pour $z = 0$.

R 9 On a $u_n = k + a^n(u_0 - k)$ donc si $|a| > 1$ et $k \neq 0$, alors $u_n = O(a^n)$ donc $\frac{u_n}{n!}x^n = O\left(\frac{(ax)^n}{n!}\right)$. La série $\sum \frac{(ax)^n}{n!}$ est absolument convergente donc $\sum \frac{u_n}{n!}x^n$ converge donc $\rho_G = +\infty$. On raisonne de même en considérant tous les cas traités dans la question 3 et on obtient à chaque fois $\rho_G = +\infty$.

R 10 On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u_{n+1} - au_n - b)}{n!}x^n = 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{u_{n+1}}{(n+1)!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{u_n}{n!}x^{n-1} = G'(x)$ car on peut dériver terme à terme la série entière sur $] -\rho_G, \rho_G[= \mathbb{R}$. On en déduit que $G'(x) - aG(x) = be^x$. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = \underbrace{\lambda e^{ax}}_{eq\ ho} + \underbrace{\frac{b}{1-a}e^x}_{sol\ part}$. Comme $G(0) = u_0$, $\lambda = u_0 - \frac{b}{1-a}$ donc

$$G(x) = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)e^{ax} + \frac{b}{1-a}e^x.$$

R 11 La fonction G résulte d'opération sur des fonctions de classe C^∞ donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a $G^{(n)}(x) = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)e^{ax} + \frac{b}{1-a}e^x$. D'après le cours, $\frac{u_n}{n!} = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}$ donc $u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$.

Deuxième partie

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

R 12 $a_0 = 1 \leq 0!$. Supposons que $\forall k \in [[0, n]]$, on a $a_k \leq k!$. On a alors $a_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} = \frac{n!}{2} \sum_{k=0}^n \frac{a_k a_{n-k}}{k!(n-k)!} \stackrel{(H.R.)}{\leq} \frac{n!}{2} (n+1) \leq (n+1)!$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq n!$.

R 13 On a $\left|\frac{a_n}{n!}\right| \leq 1$ donc $R \geq 1$, rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$. Pour $x \in]-R, R[$, on pose, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$.

R 14 Pour $x \in]-R, R[$ on a $f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \frac{a_{n-k}}{(n-k)!}$ (produit de Cauchy des série entière $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ avec elle même).

On a donc $w_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} = 2 \frac{a_{n+1}}{n!}$. On a donc $f^2(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^n = 2f'(x)$. car on peut dériver terme à terme sur $] -R, R[$.

R 15 On a $f(0) = \frac{a_0}{0!} = 1$ donc $f(0) > 0$. La fonction f est continue en 0 (car C^∞ sur $] -R, R[$) donc il existe donc $r > 0$ tel que $\forall x \in]-r, r[, f(x) > \frac{f(0)}{2} > 0$

(prendre $\varepsilon = \frac{f(0)}{2}$ dans la définition des limites).

On en déduit que si $x \in]-r, r[$ alors $\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{2}$.

Une primitive de la fonction $\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ sur $] -r, r[$ est $\frac{-1}{f(x)}$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que si $x \in]-r, r[$ alors $\frac{-1}{f(x)} = \lambda + \frac{x}{2}$.
soit $f(x) = \frac{1}{-\lambda - \frac{x}{2}}$. En prenant $x = 0$, on obtient que $\lambda = -1$ donc $f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$.

R 16 On en déduit que, si $x \in]-r, r[$ alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ donc $a_n = \frac{n!}{2^n}$ par unicité du développement en série entière en fonction de n .

EXERCICE 3:

R 17 Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$. Si A

Premier cas: $a \neq 0$ et $a \neq -1$

Alors, $\det A \neq 0$ donc A est inversible.

Donc $\text{rg} A = 3$.

Deuxième cas : $a = 0$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg} A = 2$.

Troisième cas: $a = -1$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg} A \geq 2$ car les deux premières colonnes de A sont non colinéaires.

Or $\det A = 0$ donc $\text{rg} A \leq 2$.

On en déduit que $\text{rg} A = 2$.

R 18 Notons P le polynôme caractéristique de A .

$$P(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x & -a & -1 \\ -a & x & -1 \\ -a & -1 & x \end{vmatrix}$$

Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement:

$$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x-a-1 & -a & -1 \\ x-a-1 & x & -1 \\ x-a-1 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-a-1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = (x-a-1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & x+a & 0 \\ 0 & -1+a & x+1 \end{vmatrix}.$$

Donc, en développant par rapport à la première colonne,

$$P(x) = \det(xI_n - A) = (x-a-1)(x+a)(x+1).$$

Donc $P = (X-a-1)(X+a)(X+1)$.

Les racines de P sont les valeurs propres de A donc $\text{sp}(A) = \{a+1, -a, -1\}$.

Remarque: On obtient donc $P(-1) = 0$ mais cela n'a pas servi car les combinaisons linéaires de colonnes et de ligne ont permis d'obtenir **directement une forme factorisée**.

R 19 On a $a+1 = -a \iff a = -\frac{1}{2}$ et $a+1 = -1 \iff a = -2$ et $-a = -1 \iff a = 1$ donc si $a \notin \left\{1, -2, -\frac{1}{2}\right\}$ le polynôme P admet trois racines distinctes.

Si $a \notin \left\{1, -2, -\frac{1}{2}\right\}$ A admet 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1 = a + 1$, $\lambda_2 = -a$ et $\lambda_3 = -1$ vérifiant par définition

$\dim(E_{\lambda_i}(A)) \geq 1$ donc $\sum_{i=1}^3 \dim(E_{\lambda_i}(A)) \geq 3$ donc A est diagonalisable.

R 20 Si $a = 1$. On a $P = (X - 2)(X + 1)^2$ donc $\text{sp}(A) = \{-1, 2\}$.

Or $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\text{rg}(A + I_3) = 1$ et, en appliquant le théorème du rang,

$\dim(E_{-1}(A)) = \dim(\ker(A + I_3)) = 2$.

De plus $\dim(E_2(A)) \geq 1$ donc $\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_2(A)) \geq 3$ donc A est diagonalisable.

R 21 Si $a = -2$ alors, $P = (X + 1)^2(X - 2)$ donc $\text{sp}(A) = \{-1, 2\}$.

Or $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les deux premières colonnes de $A + I_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\text{rg}(A + I_3) \geq 2$.

De plus, -1 est valeur propre de A , donc $\dim(\ker(A + I_3)) \geq 1$ donc $\text{rg}(A + I_3) \leq 2$.

Ainsi, $\text{rg}(A + I_3) = 2$ et $\dim E_{-1}(A) = 1$.

Or l'ordre multiplicité de la valeur propre -1 dans le polynôme caractéristique est $2 > 1 = \dim E_{-1}(A)$.

On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

R 22 Si $a = -\frac{1}{2}$ alors $P = (X - \frac{1}{2})^2(X + 1)$ donc $\text{sp}(A) = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$.

$A - \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Les deux premières colonnes de $A - \frac{1}{2}I_3$ sont non colinéaires, donc $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) \geq 2$.

De plus, $\frac{1}{2}$ est valeur propre donc $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) \leq 2$.

Ainsi, $\text{rg}(A - \frac{1}{2}I_3) = 2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}}(A) = 1$.

Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\frac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 4:

R 23 On a $(H) : (1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 0 \iff y'(x) - \frac{x}{1 - x^2}y(x) = 0$ sur $] -1, 1[$.

Une primitive de $x \mapsto -\frac{x}{1 - x^2}$ est $x \mapsto A(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$. Les solutions de (H) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-A(x)} = \lambda e^{-\frac{1}{2} \ln(1 - x^2)} = \lambda e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - x^2}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

R 24 L'équation différentielle est linéaire du premier ordre.

Appliquons la méthode de variation de la constante. Posons $y(x) = \frac{z(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \iff (1 - x^2) \frac{z'(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = 1$. Or $z(x) = \text{Arcsin}(x)$ convient et $y_P(x) = \frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1 - x^2}}$ est

une solution particulière de l'équation.

Les solutions sont les fonctions $y(x) = \frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$.

R 25 Soit $\sum a_n x^{2n+1}$ une série entière de rayon de convergence R . On pose, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

1. On peut dériver terme à terme une série entière sur $] -R, R[$ donc si $x \in] -R, R[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n}$ (on garde $n=0$ car $x^{2 \times 0 + 1} = x^1$).

$$\begin{aligned} (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1 &\iff (1-x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} = 1 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1 \\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) a_{n-1} x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n} = 1 \\ &\iff a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((2n+1) a_n - (2n) a_{n-1}) x^{2n} = 1 \end{aligned}$$

$$(\text{unicité du DSE}) \iff \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* (2n+1) a_n - 2n a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

donc f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $(a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (2n+3) a_{n+1} = (2n+2) a_n)$.

2. Posons $b_n = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$. On a $b_0 = 1$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1} (n+1)!^2 (2n+1)!}{(2n+3)! 4^n (n!)^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{2n+2}{2n+3}$ donc $(b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, (2n+3) b_{n+1} = (2n+2) b_n)$. Cette suite (b_n) est donc l'unique suite vérifiant les conditions de la question précédente. On en déduit que f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$.

3. Posons $u_n = a_n x^{2n+1}$. Pour $x \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1} x^2}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+3} x^2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = x^2$. Si $x^2 < 1$ alors $\sum u_n$ converge et si $x^2 > 1$ alors $\sum u_n$ diverge. On en déduit que $R = 1$.

R 26 Comme on a raisonné par équivalence dans les questions 1 et 2, on en déduit que la fonction f est solution de l'équation $(\mathcal{E})$ sur $] -1, 1[$. On peut appliquer le théorème de Cauchy à l'équation $(\mathcal{E})$ sur $] -1, 1[$ car $(1-x^2)$ ne s'annule pas sur cet intervalle. On a $f(0) = 0$ et si $y_P(x) = \frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ alors $y_P(0) = 0$. Les fonctions f et y_P sont solutions de $(\mathcal{E})$ donc $f = y_P$ donc $\forall x \in] -1, 1[$, $\frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

EXERCICE 5:

R 27 On a $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = (x-\lambda)(x+\lambda)$ avec $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$. On a

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda^2 x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \end{cases} \iff X = x_2 \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } E_\lambda(A) = \text{vect}(U_1) \text{ avec}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même $E_{-\lambda}(A) = \text{vect}(U_2)$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$

R 28 Les colonnes C_1 et C_n sont non nulles et non proportionnelles. Les colonnes $C_2, \dots, C_{n-1}$ sont colinéaires à C_1 donc le rang de M est égal à 2.

R 29 Soit $x \in F$. On a $x = x_1 e_n + x_2 f(e_n)$ donc $f(x) = x_1 f(e_n) + x_2 f^2(e_n)$. Or $f(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i$ donc $f^2(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i f(e_i) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \right) e_n$. d'où $f(x) = x_1 f(e_n) + x_2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \right) e_n \in F$. On en déduit que F est stable par f .

R 30 La famille $(e_n, f(e_n))$ est libre car $f(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i$ donc est une base de $F = \text{vect}(e_n, f(e_n))$.

On a $\begin{cases} g(e_n) = f(e_n) \\ g(f(e_n)) = f^2(e_n) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \right) e_n \end{cases}$. On en déduit que $\text{mat}_{(e_n, f(e_n))}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

Or $\det(A) = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$ car $a_1 \neq 0$ donc A est inversible donc g est un isomorphisme.

R 31 On a $A \times \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\text{mat}_{(e_n, f(e_n))}(g) = A$.

Posons $u_\lambda = \lambda e_n + f(e_n) \neq 0_E$ (car $(e_n, f(e_n))$ est libre).

On a $f(u_\lambda) = g(u_\lambda) = \lambda u_\lambda$ donc u_λ est vecteur propre de f associé à λ .

De même si $u_{-\lambda} = -\lambda e_n + f(e_n)$, $u_{-\lambda}$ est vecteur propre de f associé à $-\lambda$.

R 32 On a $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 2$ donc, par le théorème du rang, $\ker(f) = E_0(f)$ est de dimension $n - 2$.

De plus, $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$ et $\dim(E_{-\lambda}(f)) \geq 1$ et $\lambda > 0$ donc $0, \lambda$ et $-\lambda$ sont des valeurs propres distinctes et $\dim(E_0(f)) + \dim(E_\lambda(f)) + \dim(E_{-\lambda}(f)) \geq n$ donc f est diagonalisable (et $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_{-\lambda}(f)) = 1$).

R 33 On remarque que, pour $2 \leq i \leq n-1$, $\begin{cases} f(e_1) = a_1 e_n \\ f(e_i) = a_i e_n \end{cases}$ donc $a_i f(e_1) - a_1 f(e_i) = 0$ donc $f(a_i e_1 - a_1 e_i) = 0$.

Posons $u_i = a_i e_1 - a_1 e_i = \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$. La famille $(u_2, \dots, u_{n-1})$ est une famille échelonnée (car $a_1 \neq 0$)

donc libre de $\ker(f)$. Or $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 2$ donc, par le théorème du rang, $\ker(f)$ est de dimension $n - 2$ donc admet $(u_2, \dots, u_{n-1})$ comme base.

Remarque: on peut aussi résoudre le système $A \times X = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

R 34 D'après ce qui précède,

- (u_λ) est une base de $E_\lambda(f)$,
- $(u_{-\lambda})$ est une base de $E_{-\lambda}(f)$,
- $(u_2, \dots, u_{n-1})$ est une base de $E_0(f)$
- $\mathbb{R}^n = E_\lambda(f) \oplus E_{-\lambda}(f) \oplus E_0(f)$ car f est diagonalisable donc

$$(u_\lambda, u_{-\lambda}u_2, \dots, u_{n-1}) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n \text{ et } \text{mat}_{(u_\lambda, u_{-\lambda}u_2, \dots, u_{n-1})}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

On a $P^{-1}MP = D$ avec

$$P = P_{(e_1, \dots, e_n)}^{(u_0, \dots, u_{n-1})} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ & \vdots & -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & & -a_{n-1} \\ \lambda & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEME:

Notation 1 Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n scalaires, $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la matrice carrée de taille n diagonale dont les éléments diagonaux sont, dans l'ordre, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Première partie: Puissances de K_n , éléments propres de K_n

R 35 Les images des vecteurs de la base canonique par f_n sont donnés par:

$E_1 \mapsto E_2 \mapsto E_3 \mapsto \dots \mapsto E_{n-1} \mapsto E_n \mapsto E_1$ donc

$$\text{par } f^2 : \begin{cases} E_1 \mapsto E_3 \\ E_2 \mapsto E_4 \\ \vdots \vdots \vdots \\ E_{n-2} \mapsto E_n \\ E_{n-1} \mapsto E_1 \\ E_n \mapsto E_2 \end{cases} \text{ et } K_n^2 = \text{mat}_{(E_1, \dots, E_n)}(f_n^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $i \in [[1, n-1]]$; On obtient de même que,

$$\text{par } f^i : \begin{cases} E_1 \mapsto E_{i+1} \\ \vdots \vdots \vdots \\ E_{n-i} \mapsto E_n \\ E_{n-i+1} \mapsto E_1 \\ \vdots \vdots \vdots \\ E_n \mapsto E_i \end{cases} \text{ donc } K_n^i = \text{mat}_{(E_1, \dots, E_n)}(f_n^i) \text{ peut être écrite par blocs: } \left(\begin{array}{c|c} 0_{i,n-i} & I_i \\ \hline I_{n-i} & 0_{n-i,i} \end{array} \right)$$

et $\forall i \in [[1, n]]$, $f_n^n(E_i) = E_i$ donc $K_n^n = \text{mat}_{(E_1, \dots, E_n)}(f_n^n) = I_n$.

R 36 X est vecteur propre de K_n associé à λ donc $K_n X = \lambda X$ d'où

$(K_n)^2 X = K_n(K_n X) = K_n \lambda X = \lambda K_n X = \lambda^2 X$. Par récurrence immédiate, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(K_n)^i X = \lambda^i X$, $(K_n)^n = I_n$ donc $(K_n)^n X = X$.

On en déduit que $\lambda^n X = X$ et comme $X \neq 0$ car X vecteur propre; $\lambda^n = 1$.

D'après le cours, l'équation $z^n = 1$ admet comme ensemble de solutions complexes $\{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$ donc $\text{sp}(K_n) \subset \{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$.

R 37 Le polynôme caractéristique de K_n est défini par $P(x) = \det(xI_n - K_n) =$

$$\left| \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & x & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix} \right|_n = x \left| \begin{pmatrix} x & \ddots & & 0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & \\ \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix} \right|_{n-1} + (-1)^{n+2} \left| \begin{pmatrix} -1 & x & \ddots & \\ 0 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \right|_{n-1}$$

Donc $P(x) = x^n - 1$ L'équation $x^n = 1$ admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$ ($\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k \in [[0, n-1]]$)

Pour tout $k \in [[0, n-1]]$, on a $1 \leq \dim(E_{\omega_k}(K_n)) \leq m(\omega_k) = 1$. On en $\sum_{k=1}^{n-1} \dim(E_{\omega_k}(K_n)) = n$ donc K_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

R 38 Soit $AX = \omega_k X \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \omega_k x_1 \\ x_1 = \omega_k x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega_k x_n \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_1 = (\omega_k)^{-1} x_n \\ x_2 = (\omega_k)^{-1} x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega_k)^{-1} x_n \end{cases}$. En prenant $x_1 = 1$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k^{-1} \\ \vdots \\ (\omega_k^{-1})^{n-2} \\ (\omega_k^{-1})^{n-1} \end{pmatrix}$

(noté U_k dans la suite), obtenu avec les $n-1$ dernières équations, et la première équation équivaut à $x_1 = (\omega_k^{-1})^n x_1$ qui est vérifiée car $\omega_k^n = 1$. On en déduit que $E_{\omega_k}(A) = \text{vect}(U_k)$.

R 39 La famille $(U_0, \dots, U_{n-1})$ est libre car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Soit P_n la matrice de passage de la base canonique à cette base.

On a $P_n = (U_0 | \cdots | U_{n-1})$ et $P_n^{-1} K_n P_n = D_n$ avec $D_n = \text{diag}(1, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$.

R 40 Soit $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$ l'endomorphisme canoniquement associé à M et $(E_1, \dots, E_7)$ la base canonique de $\mathbb{C}^7$. Posons $F_1 = \text{vect}(E_1, E_3, E_5)$. On a $f(E_1) = E_3 \in F$, $f(E_3) = E_5 \in F$ et $f(E_5) = E_1 \in F$ donc F_1 est stable par f .

R 41 Posons $F_2 = \text{vect}(E_2, E_7, E_4, E_6)$. On montre de même que F_2 est stable par f . La famille $b = (E_1, E_3, E_5, E_2, E_7, E_4, E_6)$ est permutation de la base canonique donc est une base de $\mathbb{C}^7$ et en utilisant les images des vecteurs de cette base,

$$\text{mat}_b(f) = \left(\begin{array}{c|c} K_3 & 0 \\ \hline 0 & K_4 \end{array} \right).$$

R 42 Soit $P = \left(\begin{array}{c|c} P_3 & 0 \\ \hline 0 & P_4 \end{array} \right)$ et $R = \left(\begin{array}{c|c} P_3^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P_4^{-1} \end{array} \right)$. Les règles du produit par bloc donnent $PR = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline 0 & I_4 \end{array} \right) = I_7$ donc P est inversible d'inverse R .

R 43 la matrice M est semblable est semblable à $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} K_3 & 0 \\ \hline 0 & K_4 \end{array} \right)$ et les règles du produit par bloc donnent

$$P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} K_3 & 0 \\ \hline 0 & K_4 \end{array} \right) P = \left(\begin{array}{c|c} P_3^{-1} K_3 P_3 & 0 \\ \hline 0 & P_4^{-1} K_4 P_4 \end{array} \right) = \text{diag}(1, j, j^2, 1, i, -1, -i, -1) = D \text{ donc } M \text{ est semblable à } M \text{ (transitivité de la relation "est semblable à").}$$

Deuxième partie:

R 44 On a $BU_k = \frac{1}{2}(I_n + K_n)U_k = \frac{1}{2}(U_k + K_n U_k) = \frac{1+\omega_k}{2}U_k$. On en déduit que U_k est un vecteur propre de B associé à la valeur propre $\frac{1+\omega_k}{2}$.

R 45 Si $k \in [[1, n-1]]$ pour $Z = U_k$, on a $z_1 + \cdots + z_n = 1 + (\omega_k^{-1}) + \cdots + (\omega_k^{-1})^{n-1} = \frac{1 - \omega_k^{-n}}{1 - \omega_k^{-1}} = 0$ car $\omega_k \neq 1$ donc $U_k \in H$. La famille $(U_1, \dots, U_{n-1})$ est libre et $\dim(H) = n-1$ (équation d'hyperplan de $\mathbb{C}^n$) donc $(U_1, \dots, U_{n-1})$ est une base de H .

R 46 Soit $Z \in H$. On peut écrire $Z = \sum_{k=1}^{n-1} a_k U_k$ donc $B^p X = B^p \sum_{k=1}^{n-1} a_k X_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k B^p X_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left(\frac{1+\omega_k}{2}\right)^p X_k$. Or $\left|\frac{1+\omega_k}{2}\right| < 1$ (il n'y a pas égalité dans l'inégalité triangulaire car ω_k et 1 n'ont pas même argument) donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\omega_k}{2}\right)^p = 0$. On en déduit que la suite $(B^p Z)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

R 47 La figure ne présente pas de difficulté...

R 48 Posons $Z_0 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ (respectivement $Z_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$) le vecteur dont les composantes sont les affixes des points $\mathcal{P}_0$ (respectivement $\mathcal{P}_1$) dans l'ordre.. On a $t_1 = \frac{1}{2}(z_n + z_1)$, $t_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, $\dots$, $t_n = \frac{1}{2}(z_{n-1} + z_n)$ donc $Z_1 = BZ_0$. De même, si Z_k est le vecteur dont les composantes sont les affixes des points $\mathcal{P}_k$, on a $Z_{k+1} = BZ_k$ et donc, par récurrence, on montre que $Z_k = B^k Z_0$. Or $Z_0 \in H$ car le centre de $\mathcal{P}_0$ est le point O donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} Z_k = 0_{\mathbb{C}^n}$. Soit $r > 0$. Posons $Z_k = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_n(k) \end{pmatrix}$. On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_1(k)$ donc il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|z_1(k)| < r$. On définit de même $k_2, \dots, k_n$. En posant $k_0 = \max\{k_i, 1 \leq i \leq n\}$, si $k \geq k_0$, le polygone $\mathcal{P}_k$ est à l'intérieur du disque de centre O et de rayon r .

Troisième partie: Déterminant circulant

R 49 D'après les calculs précédents sur les puissances de K_n , on a $A = a_0 I_n + a_1 K_n + \dots + a_{n-1} K_n^{n-1}$.

R 50 On a $P_n^{-1} A P_n = P_n^{-1} (a_0 I_n + a_1 K_n + \dots + a_{n-1} K_n^{n-1}) P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_n^{-1} K_n^k P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (P_n^{-1} K_n P_n)^k$
 $P_n^{-1} A P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D_n^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_0^k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_{n-1}^k \right).$

R 51 On a $\det(A) = \det(P_n^{-1} A P_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_k^i \right).$