

PSI DM7 pour le 10 novembre 2025

Exercice: Présentation de deux méthodes: une longue et une rapide pour calculer une distance à un sous ev

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel.

Soit $H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$ et $u = (0, \dots, 0, 1)$.

Q 1 Justifier que H est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ de $\mathbb{R}^n$ et déterminer une base $(u_1, \dots, u_{n-1})$ où les vecteurs u_i ont une première composante égale à 1.

Dans les deux questions suivantes, on applique le procédé d'orthogonalisation de Schmidt **sans se ramener à des vecteurs unitaires**.

Q 2 On pose $v_1 = u_1$.

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 = u_2 + \lambda v_1$ soit orthogonal à v_1 . Préciser le vecteur v_2 obtenu.

Déterminer $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_3 = u_3 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ soit orthogonal à v_1 et v_2 .

Préciser le vecteur v_3 obtenu.

Q 3 Déterminer $(v_4, \dots, v_{n-1})$ tels que $(v_1, \dots, v_{n-1})$ soit une base orthogonale de H .

Q 4 Soit v le projeté orthogonal de u sur H . Exprimer v à l'aide de $u, v_1, \dots, v_{n-1}$. En déduire v . Préciser la distance de u à H .

Q 5 Retrouver la distance de u à H résultat en considérant un vecteur normal à H .

Conclusion: La dernière question permet de faire en quelques lignes un calcul équivalent à celui des premières questions.

Problème:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et

- On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel défini, pour $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, par $(M|N) = \text{tr}(M^T \times N)$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.
- On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

Une inégalité

Q 6 En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(M)| \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(M^T \times M)}.$$

Une première projection orthogonale

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q 7 Montrer que la famille (I_3, J) est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q 8 Donner le projeté orthogonal de la matrice A sur $F = \text{vect}(I_3, J)$.

Q 9 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1-b & 1-a & 1 \\ 0 & -b & -a \\ -a & 0 & -b \end{pmatrix}$.

Déduire de la question précédente la valeur de $\alpha = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M_{a,b}\|$.

Une deuxième projection orthogonale

Dans la suite $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque

Q 10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier qu'il existe un et un seul couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$. Exprimer S et A à l'aide de M et M^T . (c'est une question de cours de première année)

Q 11 Montrer que si $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors S est orthogonale à A . En déduire que $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Q 12 Soit $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $d(M_0, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|S - M_0\|$.

Justifier que $d(M_0, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(M_0 - M_0^T) \right\|$.

Q 13 On suppose que $n = 3$ et $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $d(M_0, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.

Formes linéaires multiplicatives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q 14 Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant:

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{tr}(A \times M).$$

(on a déjà vu cette question dans un DM précédent mais grace au cours sur les formes linéaires dans les espaces euclidiens, on peut répondre beaucoup plus rapidement et c'est cette méthode qui est attendue).

Les 3 questions suivantes ne font pas partie du DM (déjà vu).

Q 15 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{tr}(A \times E_{i,j})$.

Q 16 Soit φ une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \varphi(MN) = \varphi(NM)$.

En utilisant les deux questions précédentes, montrer qu'il existe λ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \lambda \text{tr}(M)$.

Q 17 Quelles sont les formes linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \varphi(MN) = \varphi(NM)$?

Une propriété de la norme euclidienne associée

Q 18 Montrer que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|AB\| \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

Correction du DM7

Exercice:

R 1 Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a $x \in H \Leftrightarrow x_1 = -\sum_{i=2}^n x_i \Leftrightarrow x = \left(-\sum_{i=2}^n x_i, x_2, \dots, x_n\right) \Leftrightarrow x = \sum_{i=2}^n -x_i u_i$ avec $u_i = (1, 0, \dots, \underset{i+1}{-1}, 0, \dots, 0)$. On en déduit que $H = \text{vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$. La famille $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est échelonnée donc libre donc $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est une base de H qui est donc un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$.

R 2 Début du procédé de Schmidt pour la famille $(u_1, \dots, u_{n-1})$:

• Posons $v_1 = u_1 = (1, -1, 0, \dots, 0)$.

• Posons $v_2 = u_2 + \lambda v_1$. On a $(v_2|v_1) = 0 \Leftrightarrow (u_2|v_1) + \lambda(v_1|v_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{(u_2|v_1)}{(v_1|v_1)} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$ car $(u_2|v_1) = 1$ et $(v_1|v_1) = 2$. On en déduit que $v_2 = (1, 0, -1, 0, \dots, 0) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, \dots, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0, \dots, 0\right)$.

• Posons $v_3 = u_3 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

$(v_3|v_1) = 0 \Leftrightarrow (u_3|v_1) + \lambda_1(v_1|v_1) + \lambda_2(v_2|v_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{(u_3|v_1)}{(v_1|v_1)} \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ car $(u_3|v_1) = 1$ et $(v_1|v_1) = 2$.

$(v_3|v_2) = 0 \Leftrightarrow (u_3|v_2) + \lambda_1(v_1|v_2) + \lambda_2(v_2|v_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{(u_3|v_2)}{(v_2|v_2)} \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{3}$ car $(u_3|v_2) = \frac{1}{2}$ et $(v_2|v_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$.

On a donc $v_3 = (1, 0, 0, -1, 0, \dots, 0) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, \dots, 0) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0, \dots, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0, \dots, 0\right)$.

R 3 Plutôt que de poursuivre le procédé de Schmidt, on peut vérifier que la forme obtenue pour $i = 2$ et 3 se généralise:

Posons, pour $1 \leq i \leq n-1$, $v_i = \left(\frac{1}{i}, \dots, \frac{1}{i}, -1, 0, \dots, 0\right)$. On a $v_i \in H$ (somme des composantes nulles) et, si

$1 \leq i < j \leq n-1$ $(v_i|v_j) = \underbrace{\frac{1}{i} \times \frac{1}{j} + \dots + \frac{1}{i} \times \frac{1}{j}}_{i \text{ fois}} + (-1) \times \frac{1}{j} = 0$ donc la famille $(v_1, \dots, v_{n-1})$ est une famille

orthogonale de H et sans vecteur nul donc elle est libre et, comme $\dim(H) = n-1$, c'est une base orthogonale de H .

R 4 D'après le cours, $v = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(u|v_i)}{(v_i|v_i)} v_i$. Or, si $i \leq n-2$, $(u|v_i) = 0$ et $(u|v_{n-1}) = -1$ donc $v = \frac{-1}{(v_{n-1}|v_{n-1})} v_{n-1}$.

De plus $(v_{n-1}|v_{n-1}) = (n-1) \times \frac{1}{(n-1)^2} + 1 = 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$ donc $v = -\frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, -1\right) = \left(-\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right)$.

D'après le cours, $d(u, H) = \|u - v\| = \left\|\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)\right\| = \frac{1}{n} \|(1, \dots, 1)\| = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

R 5 Si $n = (1, 1, \dots, 1)$, on a $x \in H \Leftrightarrow (x|n) = 0$ donc $H = \text{vect}(n)^\perp$.

Soit w le projeté orthogonal de u sur $\text{vect}(n) = H^\perp$.

On a $u = v + w$ et $w = \frac{(u|n)}{(n|n)} n = \frac{1}{n} n$ donc $(v = u - \frac{1}{n} n = (0, \dots, 0, 1) - \frac{1}{n}(1, \dots, 1) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right)$ inutile).

$d(u, H) = \|u - v\| = \|w\| = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Conclusion: La deuxième méthode est nettement plus rapide.

Problème:

R 6 D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $(I_n|M)^2 \leq \|I_n\|^2 \times \|M\|^2$ et $\begin{cases} (I_n|M) = \text{tr}(M) \\ \|I_n\|^2 = \text{tr}(I_n) = n \end{cases}$ donc $(\text{tr}(M))^2 \leq n \times \text{tr}(M^T \times M)$ et en passant à la racine, $|\text{tr}(M)| \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(M^T \times M)}$.

R 7 On a $(I_3|J) = \text{tr}(I_3^T \times J) = \text{tr}(J) = 0$ donc la famille (I_3, J) est une famille orthogonale.

R 8 Soit p la projection orthogonale sur $\text{vect}(I_3, J)$. On a $p(A) = \frac{(I_3|A)}{\|I_3\|^2} I_3 + \frac{(J|A)}{\|J\|^2} J = \frac{1}{3} I_3 + \frac{1}{3} J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(On a vu dans le cours que $(M|M') = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} m_{i,j} m'_{i,j}$ ce qui permet de calculer rapidement $(J|A)$ et $\|J\|^2$).

R 9 On a $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1-b & 1-a & 1 \\ 0 & -b & -a \\ -a & 0 & -b \end{pmatrix} = A - (aJ + bI_3)$.

On a donc $\alpha = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M_{a,b}\| = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|A - (aJ + bI_3)\| = \inf_{B \in \text{vect}(I_3, J)} \|A - B\| = d(A, F)$ avec $F = \text{vect}(I_3, J)$.

D'après le cours $\alpha = \|A - p(A)\|$ et $A - p(A) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\alpha = \|A - p(A)\| =$

$$\frac{1}{3} \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2 + 4 \times (-1)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

R 10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Analyse: On suppose $M = S + A$ avec $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

alors $M^T = S^T + A^T = S - A$ donc $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$.

Synthèse: On pose $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$.

On a $S^T = \left(\frac{1}{2}(M + M^T)\right)^T = \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = S$ donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

De même $A^T = -A$ donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

et $M = S + A$.

R 11 Soit $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a $(S|A) = \text{tr}(S^T \times A) = \text{tr}(S \times A)$ car S est symétrique.

De plus, $(S|A) = (A|S) = \text{tr}(A^T \times S) \underset{\text{antisym de } A}{=} \text{tr}(-A \times S) = -\text{tr}(A \times S) = -\text{tr}(S \times A)$ (car $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$).

On a donc $(S|A) = -(S|A)$ donc $(S|A) = 0$ donc $\overline{\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp}$.

On sait que $\begin{cases} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ donc } \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ donc } \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim((\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \end{cases}$ donc $\overline{\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))} = \dim((\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp)$

donc $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

R 12 Soit $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $d(M_0, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|S - M_0\|$.

D'après le cours $d(M_0, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|M_0 - p(M_0)\|$ avec $p(M_0)$ projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Or $M_0 = \left(\frac{1}{2}(M_0 + M_0^T)\right) + \left(\frac{1}{2}(M_0 - M_0^T)\right)$ avec $\left(\frac{1}{2}(M_0 + M_0^T)\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

et $\left(\frac{1}{2}(M_0 - M_0^T)\right) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

On en déduit que $\frac{1}{2}(M_0 + M_0^T) = p(M_0)$ et $d(M_0, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|M_0 - p(M_0)\| = \left\|\frac{1}{2}(M_0 - M_0^T)\right\|$.

R 13 Si $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ alors $\frac{1}{2}(M_0 - M_0^T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$d(M_0, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}.$$

R 14 Soit f une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le théorème de représentation des formes linéaires montre qu'il existe une et une seule matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant: $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = (A'|M) = \text{tr}((A')^T \times M)$.

En posant $A = (A')^T$, on a $f(M) = \text{tr}(A \times M)$ et l'unicité de A découle de celle de A' .

R 15 On a $A \times E_{i,j} = \begin{matrix} & \text{col } j \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & & a_{n,i} & 0 & \cdots \end{pmatrix} \end{matrix}$ donc $\text{tr}(A \times E_{i,j}) = a_{j,i}$.

R 16 Soit f une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(MN) = f(NM)$.

D'après la question 14, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant: $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{tr}(A \times M)$.

On a vu en cours que pour $(i, j, k, l) \in [[1, n]]^4$ si $j \neq k$, $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ et $E_{i,j}E_{j,l} = E_{i,l}$

Soit $(i, j) \in [[1, n]]^2$,

Supposons $i \neq j$. On a

$$\begin{aligned} f(E_{i,j} \times E_{j,j}) &= \text{tr}(AE_{i,j}E_{j,j}) = \text{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i} \\ f(E_{j,j} \times E_{i,j}) &= \text{tr}(AE_{j,j}E_{i,j}) = \text{tr}(A \times 0) = \text{tr}(0) = 0 \end{aligned}$$

donc $a_{j,i} = 0$

On a

$$\begin{aligned} f(E_{i,j} \times E_{j,i}) &= \text{tr}(AE_{i,j}E_{j,i}) = a_{i,i} \\ f(E_{j,i} \times E_{i,j}) &= \text{tr}(AE_{j,i}E_{i,j}) = a_{j,j} \end{aligned}$$

donc $a_{i,i} = a_{j,j}$.

On en déduit que la matrice A est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont égaux: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda I_n$ donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \text{tr}(\lambda I_n M) = \text{tr}(\lambda M) = \lambda \text{tr}(M)$.

R 17 On s'intéresse ici à la réciproque de la question précédente: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $f(M) = \lambda \text{tr}(M)$.

On a $f(MN) = \lambda \text{tr}(MN) = \lambda \text{tr}(NM) = f(NM)$.

On en déduit que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(MN) = f(NM) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(MN) = f(NM)$.

R 18 On pose $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$ et $AB = C = (c_{i,j})$.

$$\text{On a } \|AB\|^2 = \|C\|^2 = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} c_{i,j}^2 = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ donne $\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right)$ donc

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &\leq \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right). \text{ Or } \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2 \right) = \sum_{(k,l) \in [[1,n]]^2} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 \text{ donc} \\ \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) &= \sum_{(i,j,k,l) \in [[1,n]]^4} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \sum_{(i,k) \in [[1,n]]^2} a_{i,k}^2 \sum_{(j,l) \in [[1,n]]^2} b_{l,j}^2 = \|A\|^2 \|B\|^2, \text{ d'où le résultat.} \end{aligned}$$