Semaines 7 et 8

Questions avec $(*)$: plus délicate (droit à joker pour la question de cours) mais peut faire l'objet d'un exercice avec des indications.

Contenu:

- espaces préhilbertiens réels: produit scalaire, Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, orthogonalité, procédé de Schmidt, projection orthogonale, hyperplans et formes linéaires
- Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs: spectre, diagonalisabilité.
- trigonalisation
- exemples suites récurrentes linéaires (rien n'est explicitement au programme sauf l'ordre 2: révision de première année)

Questions de cours:

1. Questions du programme précédent concernant les espaces préhilbertiens
2. Soit un espace préhilbertien E et F un sous espace vectoriel de dimension finie de B.O.N $(e_1,\ldots,e_k)$ de E. donner sans démonstration l'expression de $p_F(x)$, projeté orthogonal de x sur F. Que devient la formule si la base est seulement orthogonale?
3. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E espace préhilbertien et $x\in E$, alors $\|p_F(x)\|\leq\|x\|$ où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.
4. Soit $n=(a,b,c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $vect\,(n)$.
5. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E espace préhilbertien et $x\in E$, alors pour tout $y\in F$, $d(x,y)\geq d(x,p_F(x))$ où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.
6. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E espace préhilbertien et $x\in E$. Si $(v_1,\ldots,v_k)$ est une base de F.
$$y=p_F(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\text{il existe des réels } \lambda_1,\ldots,\lambda_k \text{ tels que } y=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i v_i\\ \forall i\in[[1,k]]\ (x-y|v_i)=0\end{array}\right.$$
7. $(*)$ On considère l'ensemble $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel et $g_i: t\mapsto t^i$. Déterminer le projeté orthogonal de g_2 sur le sous-espace vectoriel $F=vect\,(g_0,g_1)$ (résoudre cette question sans passer par une BON de F). En déduire la valeur de $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1\left(t^2-(at+b)\right)^2dt$.
8. Soit E un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal n et $x\in E$. Exprimer la distance de x à H et celle de x à $vect\,(n)$ en fonction de x et n.
9. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\ker(A)=\ker\left(A^T\times A\right)$ et $\mathrm{Im}\left(A^T\right)=\mathrm{Im}\left(A^T\times A\right)$ (exo).
10. Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Exprimer $tr\left(A^T\times B\right)$ à l'aide des coefficients de A et B. Montrer que $(A|B)=tr\left(A^T\times B\right)$ définit un produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
11. Soit $a\in E$ et f l'application de E espace préhilbertien dans E définie par $f(x)=x-2\frac{(a|x)}{(a|a)}a$. Reconnaître l'application f (exo).
12. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$ et f canoniquement associée à A. La matrice A est-elle diagonalisable? Soit e_1 un vecteur propre et $b=(e_1,e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha\neq0$ tels que $mat_b(f)=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.
13. Si x est vecteur propre de l'endomorphisme u associé à la valeur propre λ, alors x est vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.
Si P est un polynôme annulateur de A et λ est une valeur propre de A alors $P(\lambda)=0$.
14. Soit $A=\begin{pmatrix}-6&5&10\\-1&0&2\\-4&4&7\end{pmatrix}$ Déterminer un polynôme annulateur de A de dégré 2. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.
15. (même matrice que Q3) On admet que $(A+I_3)(A-3I_3)=0$. Exprimer A^n comme combinaison linéaire de A et I_3.

16. A diagonalisable $\Rightarrow \prod\limits_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A (démonstration matricielle)

17. Si P est un polynôme annulateur de u, tout multiple de P est un polynôme annulateur de u (on mettra en évidence la propriété algébrique utilisée).

18. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors A admet un polynôme annulateur non nul de degré $\leq n^2$. Citer sans démonstration le théorème de Cayley Hamilton. En quoi cela améliore-t-il le résultat précédent?

19. $(*)$ En utilisant la restriction de f à $\ker(g \circ f)$, montrer que $\dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(\ker(g)) + \dim(\ker(f))$.

20. Théorème de caractérisation de la diagonalisabilité par les polynômes annulateurs (énoncé seul).

21. Soit u et v deux endomorphismes de E. Si $u \circ v = v \circ u$ alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 - 3A + 2I_n$. Montrer que $tr(A) \in \mathbb{N}$.

23. Si μ n'est pas valeur propre de u et si $(X - \mu) \times P$ est un polynôme annulateur de u, alors P est un polynôme annulateur de u.

24. Rappeler le théorème de diagonalisation portant sur le polynôme caractéristique. Donner sans démonstration une condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité. Que peut-on dire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

25. Citer et démontrer un théorème sur la somme et le produit des valeurs propres en utilisant la trigonalisation.

26. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que $tr(M) = 5$ et $tr\left(M^2\right) = 13$. Que peut-on dire de M?

27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A est nilpotente et $\lambda \in sp(A)$ alors $\lambda = 0$. En déduire qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous nuls.

28. Soit (u_n) une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} + 4u_{n+1} - 12u_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

    - Déterminer une matrice A carrée de taille 3 telle que la suite $(u_n) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$. Exprimer X_n en fonction de X_0, A et n.
    - On admet que $sp(A) = \{-2, 2, 3\}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_{-2}(A)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \in E_3(A)$.
    - On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Décomposer X_0 suivant une base de vecteurs propres de A

      Exprimer u_n en fonction de n (on ne calculera pas d'inverse de matrice).

      (calcul non fait en cours: on obtient $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$)

29. Déterminer les suites réelles (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

30. Déterminer les suites réelles (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n$.