

## EXERCICE 1:

**Q 1** On considère  $E = \mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel.

Soit  $a = (1, 2, 1)$  et  $H$  le sous espace vectoriel de  $E$  défini par  $(x_1, x_2, x_3) \in H \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ .

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale  $p$  sur  $F = \text{vect}(a)$ .
2. En déduire la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale  $s$  par rapport à  $H$ .

## EXERCICE 2:

Dans tout le problème, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

On note  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On pourra noter, pour  $k \in [[0, n]]$ ,  $F_k = \mathbb{R}_k[X]$ .

Partie I - Produit scalaire sur  $E$

### I.1 - Généralités

Pour tout couple  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ , on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

**Q 2** Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$  est convergente.

**Q 3** En déduire que pour tout  $R \in \mathbb{R}_n[X]$ , l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} R(t)e^{-t} dt$  est convergente.

**Q 4** Montrer que l'application  $\left\{ \begin{array}{l} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto (P|Q) \end{array} \right.$  est un produit scalaire de  $E$ .

### I.2 - Calcul d'un produit scalaire

**Q 5** Soit  $k \in [[1, n]]$ . Etablir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

**Q 6** En déduire la valeur de l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ .

**Q 7** En déduire la valeur de  $(X^i | X^j)$  pour tout  $(i, j) \in [[0, n]]^2$ .

### I.3 - Calcul de $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt}$

Dans cette partie, on suppose que  $n = 2$ . On pose  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $F = \mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(1, X)$  et, pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $P = aX + b$ .

**Q 8** Pour quelle valeur de  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , le polynôme  $P$  vérifie-t-il le système d'équations suivant?

$$\left\{ \begin{array}{l} (X^2 - P | 1) = 0 \\ (X^2 - P | X) = 0 \end{array} \right.$$

**Q 9** En déduire le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F$ .

**Q 10** Déterminer le réel  $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt}$ .

# I Problème:

## Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

### I.1 - Généralités

**R 1** La fonction  $t \mapsto t^k e^{-t}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

De plus,  $\frac{t^k e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{k+2} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées donc  $t^k e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .

Or  $\frac{1}{t^2} > 0$  sur  $[1, +\infty[$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  est convergente donc  $\int_1^{+\infty} t^k e^{-t} dt$  converge donc  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$  converge.

**R 2** •  $t \mapsto R(t)e^{-t}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

• Si  $R$  est un polynôme non nul de degré  $p \in \mathbb{N}$  et  $a_p$  est son coefficient dominant,  $R(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} a_p t^p$  donc  $R(t)e^{-t} \sim_{t \rightarrow +\infty} a_p t^p e^{-t}$  et  $t \mapsto t^p e^{-t} \geq 0$  et  $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$  converge.  
par comparaison, l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} R(t)e^{-t} dt$  converge.

**R 3** • D'après la question précédente, pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ ,  $(P|Q)$  existe et est un réel.

• Pour tout  $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ ,

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t} dt = (Q|P),$$

donc  $(.|.)$  est symétrique.

• Pour tout  $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$ , pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda P + \mu Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + \mu Q(t))R(t)e^{-t} dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t} dt + \mu \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale convergente}) \\ &= \lambda(P|R) + (Q|R), \end{aligned}$$

donc  $(.|.)$  est linéaire à gauche.

•  $(.|.)$  est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.

• Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P^2(t)e^{-t} \geq 0$ .

D'où, par positivité de l'intégrale (qui converge et " $+\infty > 0$ "), on a :

$$(P|P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt \geq 0.$$

$(.|.)$  est donc positif.

• Enfin, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , si  $(P|P) = 0$ , alors  $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt = 0$ .

Or  $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}_+$ , " $0 < +\infty$ " et  $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt$  converge, donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $P^2(t)e^{-t} = 0$ , et donc  $P^2(t) = 0$ , puis  $P(t) = 0$ .

Le polynôme  $P$  a donc une infinité de racines (tous les éléments de  $\mathbb{R}_+$ ), donc  $P = 0$ .

$(.|.)$  est donc bien défini.

•  $(.|.)$  définit donc bien un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### I.2 - Calcul d'un produit scalaire

**R 4** On pose  $u(t) = t^k$  et  $v(t) = -e^{-t}$  Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  et  $u'(t) = kt^{k-1}$  et  $v'(t) = e^{-t}$ .

Comme  $u(t)v(t) = -t^k e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées et  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$  est convergente d'après la première question.

On peut donc intégrer par parties:

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = [-t^k e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} k t^{k-1} e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

**R 5** Posons  $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ . On a  $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$  et  $\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$  donc  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

D'après la question précédente,  $I_k = k I_{k-1} = k(k-1) I_{k-2} = k(k-1)(k-2) I_{k-3} = \dots = k(k-1) \times \dots \times 2 \times 1 \times I_0 = k!$ .

**R 6** On a  $(X^i | X^k) = \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} dt = (i+j)!$

### I.0.1 I.3 - Calcul de $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt}$

Dans cette partie, on suppose que  $n = 2$ . On pose  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $F = \mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(1, X)$  et, pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $P = aX + b$ .

**R 7** On a  $(X^2 - P | 1) = (X^2 - aX - b | 1) = (X^2 | 1) - a(X | 1) - b(1 | 1) = 2! - a \times 1! - b \times 0! = 2 - a - b$ . et  $(X^2 - P | X) = (X^2 - aX - b | X) = (X^2 | X) - a(X | X) - b(1 | X) = 3! - a \times 2! - b \times 1! = 6 - 2a - b$ .

On a donc  $\begin{cases} (X^2 - P | 1) = 0 \\ (X^2 - P | X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b) = (4, -2)$ .

**R 8** Posons  $P_0 = 4X - 2 \in \text{vect}(1, X)$ . On a  $\begin{cases} (X^2 - P_0 | 1) = 0 \\ (X^2 - P_0 | X) = 0 \end{cases}$  donc  $X^2 - P_0 \in \text{vect}(1, X)^\perp$  donc  $X^2 = P_0 + (X^2 - P_0)$  avec  $P_0 \in F$  et  $X^2 - P_0 \in F^\perp$  donc  $P_0$  est le projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $F$ .

**R 9** Si  $P = aX + b$  alors  $\sqrt{\int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt} = \sqrt{(X^2 - P | X^2 - P)} = \|X^2 - P\|$ .

On a donc  $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt} = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - P\| = \inf_{P \in F} \|X^2 - P\| = d(X^2, F)$ .

D'après le cours,  $d(X^2, F) = \|X^2 - P_0\| = \|X^2 - 4X + 2\|$ .

Or  $\|X^2 - 4X + 2\|^2 = \|X^2\|^2 + 16\|X\|^2 + 4\|1\|^2 - 8(X^2 | X) + 4(X^2 | 1) - 16(X | 1) = 4! + 16 \times 2! + 4 \times 0! - 8 \times 3! + 4 \times 2! - 16 \times 1! = 4$ .

On en déduit que  $m = 2$ .