Semaines 9 et 10

I Contenu

- Isométries vectorielles et matrices orthogonales, changement de base orthonormée, déterminant d'une matrice orthogonale. Notations $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $O(E)$, $SO(E)$.
  Formule de changement de base pour le déterminant d'une famille de vecteurs, Orientation d'un espace vectoriel, changement de base orthonormée directe,
  matrices orthogonales de taille 2, isométries dans le cas $n = 2$. rotations de l'espace.
- endomorphismes auto-adjoints, théorème spectral.
- Révisions de proba: formule des probas composées, formule de Bayes, formule des probabilités totales, dénombrement.

AVERTISSEMENT POUR LES COLLEURS: HORS PROGRAMME DE CETTE SEMAINE:

- endomorphismes auto-adjoint positifs
- produit mixte, produit vectoriel

II Questions de cours

E désigne un espace euclidien (éventuellement orienté)

1. Caractérisations des isométries vectorielles (3, def comprise).
2. Une symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.
3. Une isométrie vectorielle est automorphisme. Composée et réciproque d'une isométrie vectorielle.
4. Soit u une isométrie vectorielle de E. Montrer que si $\lambda \in sp(u) \Rightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$.
   Si $sp(u) = \{-1, 1\}$, montrer que $E_1(u) \perp E_{-1}(u)^{\perp}$.
5. $(*)$ Soit u une isométrie vectorielle de E. F est un sous-espace de E stable par u.
   Montrer que $u(F) = F$. En déduire que $F^{\perp}$ est stable par u.
6. Soit b une base orthonormée de E. $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ deux familles de E. Soit A la matrice de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base b et B la matrice de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ dans la base b. On pose $\left(A^T\right) \times B = C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$. On a $c_{i,j} = (u_i \mid v_j)$ (démonstration possible avec les lignes et les colonnes)
7. Si $M = mat_{BON}(u_1, \ldots, u_n)$ alors $(u_1, \ldots, u_n)$ BON $\Leftrightarrow \left(M^T\right) \times M = I_n$
8. Caractérisation des matrices orthogonales (énoncé seul).
9. Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à $+1$ ou à -1. La réciproque est fausse.
10. $O_n(\mathbb{R})$ est stable par $\times$ et inverse. $SO_n(\mathbb{R})$ est stable par $\times$ et inverse.
11. Définition d'une rotation vectorielle. La composée de deux rotations est une rotation. Notation $SO(E)$ et $SO(n)$.
12. Définition et déterminant d'une réflexion.
13. Qu'est-ce que choisir une orientation de E?
14. Soit (i, j, k) une base directe d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Etudier l'orientation des bases $(-i, j, k)$, $(-i, -j, k)$, (j, i, k) et (j, k, i).
15. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une famille orthonormée de E. Il existe un et un seul vecteur e_n de E tel que $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée directe de E.
16. Soit b une base orthonormée directe de E et b' une base de E. La base b' est une base orthonormée directe de E si et seulement si la matrice de passage $P_b^{b'}$ est une matrice orthogonale de déterminant $+1$ ($P_b^{b'} \in \mathcal{SO}(n)$).
17. Calcul de $R_\theta R_{\theta'}$ et de $(R_\theta)^{-1}$.
18. Valeurs propres réelles et complexes de R_θ.
19. La matrice d'une rotation vectorielle plane ne dépend pas de la BOND choisie.
20. Image d'un vecteur unitaire par la rotation vectorielle plane d'angle θ.

21. Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe engendré par $(1,1,1)$.

22. Soit $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, Déterminer l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

23. définition d'un endomorphisme u autoadjoint. Si F est stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u

24. Si la matrice de $u\in\mathcal{L}(E)$ est antisymétrique dans une BON, elle l'est dans toute BON.

25. Si F est un sous-espace vectoriel de E espace euclidien stable par u endomorphisme auto-adjoint alors $F^{\perp}$ est stable par u. Les sous-espaces propres de u sont orthogonaux.

26. $\mathcal{B}$ base orthonormée de E et $f\in\mathcal{L}(E)$ et $M=mat_{\mathcal{B}}(f)=(m_{i,j})$. Pour tout $(i,j)\,,m_{i,j}=(f(e_j)\mid e_i)$.

27. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $u\in\mathcal{L}(E)$. L'endomorphisme u est auto-adjoint si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique.

28. Les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont des endomorphismes auto-adjoints.

29. Déterminer les endomorphismes auto-adjoints qui sont aussi des isométries.

30. $(*)$ En admettant que tout endomorphisme auto-adjoint admet une valeur propre, montrer que tout endomorphisme auto-adjoint admet une base orthonormée de vecteurs propres.