DM9 (pour le vendredi 28 novembre 2025)

- Vous pouvez retravailler le problème du DS3 qui est très classique
- Je suis disponible pour répondre aux questions sur le DS3 et le DM9 le mercredi 19 après le cours.

Problème:

On considère deux entiers naturels non nuls n et p, un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{R}$ et un endomorphisme f de E. Pour $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Soit χ_A le polynôme caractéristique de A et $Q = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - a_{p-2}X^{p-2} - \cdots - a_1 X - a_0$.

Préliminaire

Q 1 *Montrer que $\chi_A = Q$.*

Première partie: Etude de trois exemples

Premier exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q 2 *Déterminer $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$. Justifier que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Q 3 *Exprimer $f^3(e_1)$ dans la base $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$. En déduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Deuxième exemple

On considère la matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$B = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) est B.

Q 4 *Justifier que la famille $(e_1, f(e_1))$ est libre et montrer que $f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1 = 0$.*

Q 5 *En déduire qu'il existe $(B_1, B_2) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ tels que M est semblable à la matrice définie par bloc*

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} & B_1 \\ \hline 0_{2,2} & B_2 \end{array}\right)$$

Q 6 *En déduire que la matrice B n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.*

Troisième exemple

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifant:

$$\left\{ \begin{array}{c} f^2 + id_E \neq 0 \\ f^2 + 4id_E \neq 0 \\ (f^2 + id_E) \circ (f^2 + 4id_E) = 0 : (\mathcal{R}) \end{array} \right.$$

Q 7 *Justifier que* $sp(f) = \emptyset$.

Q 8 *Justifier que* $\ker(f^2 + id_E) \neq \{0\}$.

Q 9 *Montrer que* $\ker(f^2 + id_E)$ *est stable par* f.

Q 10 *Soit* $e \in \ker(f^2 + id_E)$, $e \neq 0_E$. *Montrer que* $(e, f(e))$ *est libre. En déduire que* $\dim(\ker(f^2 + id_E)) \geq 2$.

Q 11 *Montrer que* $E = \ker(f^2 + id_E) \oplus \ker(f^2 + 4id_E)$. *Préciser* $\dim(\ker(f^2 + id_E))$ *et* $\dim(\ker(f^2 + 4id_E))$.

Q 12 *En déduire qu'il existe une base* $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ *de* E *dans laquelle la matrice de* f *est*

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

.

Dans la suite de cette partie,

- $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base obtenue dans la question précédente.
- On pose $u = e_1 + e_3$.

Q 13 *Justifier que la famille* $(u, f(u), f^2(u), f^3(u))$ *est une base de* E
(on pourra prendre les coordonnées des vecteurs de cette famille dans la base b*).*

Q 14 *Déterminer la matrice de* f *dans cette base (on pourra utiliser la relation* $(\mathcal{R})$*).*

Deuxième partie: Plus petit sous-espace stable contenant un vecteur et théorème de Cayley-Hamilton

Le but de cette partie est la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Soit x un vecteur non nul de E. On considère la suite de vecteurs $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\left\{ \begin{array}{rl} & x_0 = x \\ \forall k \geqslant 0 & x_{k+1} = f(x_k) \end{array} \right.$$

Q 15 *Exprimer, pour* $k \in \mathbb{N}$, x_k *en fonction de* x_0 *et* f.

Q 16 *Justifier qu'il existe un plus grand entier* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ *est une famille libre.*

Dans la suite on note p l'entier obtenu dans cette question et $E_x = vect(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$.

Q 17 *Montrer qu'il existe une unique famille de réels* $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$ *tels que* $x_p = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i x_i$.

Dans la suite $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ est l'unique famille de réels tels que $x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$ et $Q = Q = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$.

Q 18 *Justifier que E_x est stable par f.*

Q 19 *Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.*

On a donc montré que E_x est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x et stable par f.

Q 20 *Vérifier, sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, que $Q(f)(x) = 0_E$*

Q 21 *On note $\hat{f}$ l'endomorphisme de E_x induit par f sur E_x: on a donc $\hat{f} : \left\{ \begin{array}{l} E_x \to E_x \\ x \mapsto \hat{f}(x) = f(x) \end{array} \right.$*
Déterminer le polynôme caractéristique de $\hat{f}$.

Q 22 *Déduire de la question précédente que le polynôme caractéristique de f est un multiple de Q.*

Q 23 *En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.*

DM 9 correction

R 1 *Récurrence (fait en cours)*

$p=1$: $det((x-a_0))=x-a_0$

$p=2$: $\begin{vmatrix} x & -a_0 \\ -1 & x-a_1 \end{vmatrix} = x^2-a_1x-a_0$.

Supposons la propriété vraie pour $p-1$ avec $p-1\geq 2$. Montrons la pour p. On a, en développement par rapport à la première ligne,

$$\chi_A(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & x & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x-a_{p-1} \end{vmatrix}_p$$

$$= x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & x & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x-a_{p-1} \end{vmatrix}_{p-1} + (-1)^{p+2}a_0\begin{vmatrix} -1 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{p-1}.$$

Or , $\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ -1 & x & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x-a_{p-1} \end{vmatrix}_{p-1} \underset{(HR)}{=} x^{p-1}-a_{p-1}x^{p-2}-\cdots-a_1$ *et donc*

$\chi_A(x)=x\left(x^{p-1}-a_{p-1}x^{p-2}-\cdots-a_1\right)-a_0=Q(x)$.

R 2 *On a $f(e_1)=e_3$ et $f^2(e_1)=f(e_3)=e_1+e_2+e_3$ donc $mat_{(e_1,e_2,e_3)}(e_1,f(e_1),f^2(e_1))=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est de déterminant non nul (égal à -1) donc $(e_1,f(e_1),f^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

R 3 *On a $f^3(e_1)=f(e_1+e_2+e_3)=f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=2e_1+e_2+3e_3$*
donc $f^3(e_1)=(e_1+e_2+e_3)+2e_3+e_1=f^2(e_1)+2f(e_1)+e_1$.

Dans la base $(e_1,f(e_1),f^2(e_1))$ la matrice de f est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est donc semblable à M.

R 4 *On a $f(e_1)=\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ non colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $(e_1,f(e_1))$ est libre.*

De plus, $B\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix}$

donc $f^2(e_1)+10f(e_1)+100e_1=\begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix}+10\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}+100\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

R 5 *On complète la famille libre $(e_1, f(e_1))$ en une base b de $\mathbb{R}^4$.*

On a donc $mat_b(f)$ *de la forme* $B' = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} & B_1 \\ \hline 0_{2,2} & B_2 \end{array}\right)$ *car* $f(f(e_1)) = f^2(e_1) = -10f(e_1) - 100e_1$.

R 6 *Posons* $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$. *Les matrices B et B' sont semblables donc* $\chi_B = \chi_{B'}$

Or $\chi_{B'}(x) = \det(xI_4 - B') = \det\left(\begin{array}{c|c} xI_2 - B_0 & \text{-}B_1 \\ \hline 0_{2,2} & xI_2 - B_2 \end{array}\right) = \chi_{B_0}(x) \times \chi_{B_2}(x)$.

Or $\chi_{B_0} = X^2 + 10X + 100$ *dont le discriminant est* $-300 < 0$ *donc* χ_{B_0} *n'admet pas de racines donc* $\chi_{B'} = \chi_B$ *n'est pas scindé donc B n'est pas trigonalisable.*

R 7 *Le polynôme* $(X^2+1)(X^2+4)$ *est un polynôme annulateur de f et n'a pas de racines (réelles) donc* $sp(f) = \emptyset$.

R 8 *Si on avait* $\ker(f^2 + id_E) = \{0\}$ *alors* $(f^2 + id_E)$ *serait bijectif (endo +dim finie)*
Or $(f^2 + id_E) \circ (f^2 + 4id_E) = 0$ *donc en composant à gauche par* $(f^2 + id_E)^{-1}$, *on aurait* $(f^2 + 4id_E) = 0$, *ce qui contredit l'hypothèse donc* $\ker(f^2 + id_E) \neq \{0\}$

R 9 *Soit* $x \in \ker(f^2 + id_E)$. *Montrons* $f(x) \in \ker(f^2 + id_E)$.
On a $(f^2 + id_E)(f(x)) = f^3(x) + f(x) = f((f^2 + id_E)(x)) = f(0_E) = 0_E$ *donc* $f(x) \in \ker(f^2 + id_E)$ *donc* $\ker(f^2 + id_E)$ *est stable par f.*

R 10 *Il existe donc* $e \in \ker(f^2 + id_E) \setminus \{0_E\}$. *On a* $f(e) \in \ker(f^2 + id_E)$
La famille $(e, f(e))$ est libre car sinon e serait vecteur propre de f qui n'admet pas de vecteurs propres donc $\dim(\ker(f^2 + id_E)) \geq 2$.

R 11 *Le polynôme* $(X+1)(X+4)$ *est un polynôme annulateur scindé à racines simples de* f^2
donc f^2 est diagonalisable et $sp(f^2) \subset \{-1, -4\}$.
On a vu que $\ker(f^2 + id_E) \neq \{0\}$ *et (de même),* $\ker(f^2 + 4id_E) \neq \{0\}$ *donc* $sp(f^2) = \{-1, -4\}$
et $E = \ker(f^2 + id_E) \oplus \ker(f^2 + 4id_E)$.
On a donc $\dim(\ker(f^2 + id_E)) + \dim(\ker(f^2 + 4id_E)) = 4$.
Or $\dim(\ker(f^2 + id_E)) \geq 2$ *et* $\dim(\ker(f^2 + 4id_E)) \geq 2$ *(idem)*
donc $\dim(\ker(f^2 + id_E)) = \dim(\ker(f^2 + 4id_E)) = 2$

R 12 *Soit* $e_1 \in \ker(f^2 + id_E) \setminus \{0_E\}$ *et* $e_3 \in \ker(f^2 + 4id_E) \setminus \{0_E\}$.
D'après ce qui précède, $(e_1, f(e_1))$ *est libre dans* $\ker(f^2 + id_E)$ *qui est de dimension 2 donc* $(e_1, f(e_1))$ *est une base de* $\ker(f^2 + id_E)$
De même $(e_3, f(e_3))$ *est une base de* $\ker(f^2 + 4id_E)$ *donc* $(e_1, f(e_1), e_3, f(e_3))$ *est une base de E*
(car $E = \ker(f^2 + id_E) \oplus \ker(f^2 + 4id_E)$*) .Dans cette base de E la matrice de f est*

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ \hline 0_{2,2} & \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$ *(car* $f(f(e_1)) = -e_1$ *et* $f(f(e_3)) = -4e_3$*).*

R 13 *On a* $u = e_1 + e_3$.*donc* $f(u) = f(e_1) + f(e_3) = e_2 + e_4$ *donc* $f^2(u) = f(e_2 + e_4) = -e_1 - 4e_3$

et $f^3(u) = f(-e_1) + f(-4e_3) = -e_2 - 4e_4$ *donc* $mat_{(e_1,e_2,e_3,e_4)}(u, f(u), f^2(u), f^3(u)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

qui est inversible (faire les transformations $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ *et* $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$*) donc* $(u, f(u), f^2(u), f^3(u))$ *est une base de E.*

R 14 *Or* $(f^2 + id_E) \circ (f^2 + 4id_E) = 0$ *donc* $f^4 + 5f^2 + 4id_E = 0$ *donc* $f^4(u) = -5f^2(u) - 4u$.

On en déduit que la matrice de u *dans la base* $(u, f(u), f^2(u), f^3(u))$ *est* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

R 15 *Par récurrence,* $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k = f^k(x)$.

R 16 *Posons* $\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N}^*, (x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ *est libre*$\}$.
- La famille (x_0) *est libre car* $x \neq 0$ *donc* $1 \in \mathcal{E}$ *qui est donc non vide.*
- si $k > \dim(E)$ *alors* $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ *est liée donc* $k \notin \mathcal{E}$ *donc* $\mathcal{E}$ *est une partie majorée par* $\dim(E)$.
L'ensemble $\mathcal{E}$ *est une partie de* $\mathbb{N}$ *majorée donc* $\mathcal{E}$ *admet un plus grand élément donc il existe un plus grand entier* p *tel que* $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ *soit une famille libre.*

R 17 *On a* $p \in \mathcal{E}$ *donc* $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ *est une famille libre et* $p + 1 \notin \mathcal{E}$ *donc* $(x_0, x_1, \dots, x_p)$ *est une famille liée donc il existe une unique famille de réels* $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ *tels que* $x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$.

R 18 *Soit* $y = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i x_i$. *Par linéarité,* $f(y) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{i-1} x_i + \lambda_{p-1} x_p \in E_x$
car $x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i \in E_x$.*donc* E_x *est stable par* f.

R 19 F *un sous-espace vectoriel de* E *contenant* $x = x_0$ *et stable par* f. *donc* $x_1 = f(x) \in F$ *donc* $x_2 = f(x_1) \in F$ *... et par récurrence finie,* $\forall k \in [[0, p-1]],\ x_k \in F$
Comme F *est un sous-espace vectoriel de* E, F *continent les combinaisons linéaires de* $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ *donc* $E_x \subset F$.

R 20 $Q(f) = f^p - a_{p-1}f^{p-1} - a_{p-2}f^{p-2} - \cdots - a_1 f - a_0 id_E$.*donc*
$Q(f)(x) = f^p(x) - a_{p-1}f^{p-1}(x) - a_{p-2}f^{p-2}(x) - \cdots - a_1 f(x) - a_0 id_E(x) = x_p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i = 0$.

R 21 *On complète la famille libre* $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ *en une base* $\mathcal{B}$ *de* E. *La matrice* M *de* f *dans* $\mathcal{B}$ *est carrée de taille* n *définie par blocs de la forme* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p,p} & C \end{pmatrix}$.
On a donc $\chi_M(x) = \det(x id_E - f) = \det(xI_n - M) = \begin{vmatrix} xI_p - A & -B \\ 0_{n-p,p} & xI_{n-p} - C \end{vmatrix}$ *donc*
$\forall x \in \mathbb{R},\ \chi_M(x) = \det(xI_p - A) \times \det(xI_{n-p} - C) = Q(x) H(x)$ *ou* H *est le polynôme caractéristique de* C *donc* χ_M *est multiple de* Q.

R 22 *On a donc* $\chi_M = H \times Q$ *donc* $\chi_M(f) = H(f) \circ Q(f)$ *donc* $\chi_M(f)(x) = H(f)(Q(f)(x)) = H(f)(0_E) = 0_E$ *(par linéarité)*

R 23 *On a, pour tout* $x \in E$, $\chi_M(f)(x) = 0_E$ *donc* $\chi_M(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$: *Théorème de Cayley-Hamilton.*