DM 10 (pour le vendredi 5 décembre 2025)

Exercice: (Ccinp 2018):

Révision: Espérance, variance et manipulation de coefficients binômiaux

Soit $n \geq 1$, et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé Ω et à valeurs dans $[[0, n]]$. On suppose qu'existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $k \in [[0, n]]$, $P(X = k) = \dfrac{a}{k+1}\binom{n}{k}$.

Q 1 *Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq k \leq n$. Exprimez $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$*

Q 2 *En déduire la valeur de a.*

Q 3 *Calculer l'espérance de X.*

Q 4 *Montrer que $E(X \times (X+1)) = an2^{n-1}$. En déduire la variance de X.*

Problème:

Pour $\theta \in R$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Première partie: Etude d'un exemple

Soit $M = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme canoniquement assoicié à M.

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q 5 *Donner un polynôme annulateur de R_θ de degré 2.*

Q 6 *Que peut-on dire de M ?*

Q 7 *Donner un polynôme P_0 annulateur de M de degré 2.*

Q 8 *Déduire de la question précédente que $F = vect(e_1, f(e_1))$ est de dimension 2 et est stable par f.*

Q 9 *En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec A et B matrices de $O(2)$ (on utilisera un théorème du cours sur les isométries vectorielles).*

Q 10 *Justifier que $sp(A) = sp(B) = \emptyset$. En déduire que A et B sont des matrices de rotations.*

Q 11 *On pose $\theta_0 = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. A l'aide de P_0 déterminer les valeurs propres complexes de A.*

Q 12 *Montrer que $A = R_{\theta_0}$ ou $A = R_{-\theta_0}$ et $B = R_{\theta_0}$ ou $B = R_{-\theta_0}$.*

Q 13 *Déterminer un vecteur e_1' tel que (e_1, e_1') soit une base orthonormée de F.*

Q 14 *Justifier que $e_2 \in F^\perp$ et déterminer un vecteur e_2' tel que (e_2, e_2') soit une base orthonormée de $F^\perp$.*

Q 15 *Donner une matrice $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} R_{\theta_0} & 0 \\ \hline 0 & R_{\theta_0} \end{array}\right)$*

Deuxième partie: Réduction des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

.0.1 Droite ou plan stable d'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit P un polynôme annulateur non nul de coefficient dominant égal à 1.
On pose $P = P_1 \times \cdots \times P_k$ sa décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ avec P_i de la forme $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $X^2 + aX + b$ de discrimiant strictement négatif avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (les P_i ne sont pas supposés à priori deux à deux distincts).

Q 16 *On suppose que $sp(f) = \emptyset$. Montrer que n est pair.*

Q 17 *Montrer qu'il existe $i \in [[1, k]]$ tel que* $\ker(P_i(f)) \neq \{0_E\}$.

Q 18 *Soit $e \in \ker(P_i(f))$, $e \neq 0_E$. Montrer que e est vecteur propre de f ou $F = vect(e, f(e))$ est un sous-espace stable par f de dimension 2.*

Q 19 *En déduire qu'il existe une sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2 stable par f.*

.0.2 Application aux isométries vectorielles

On suppose maintenant que E est euclidien et que f une isométrie vectorielle de E.

Q 20 *On suppose que $sp(f) = \emptyset$ et on pose $n = 2p$.*

a *Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de dimension 2 vérifiant:*

$$\begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p. \\ \forall (i,j) \in [[1,p]]^2,\ i \neq j \Rightarrow F_i \perp F_j. \ . \\ \forall (i,j) \in [1,p],\ F_i \text{ est stable par } f. \end{cases}$$

b *Justifier que l'endomorphisme induit par f sur F_i est une rotation.*

Q 21 *On ne suppose plus que $sp(f) = \emptyset$. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs de la forme* $\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_{n_2} & & & \vdots \\ \vdots & (0) & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_{\theta_p} \end{pmatrix}$ *avec $n_i \geq 0$ et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ des réels.*

Q 22 *Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_{n_2} & & & \vdots \\ \vdots & (0) & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_{\theta_p} \end{pmatrix}$.

Exercice:

R 1 *On a, si* $k \geq 1$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n}{k}\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

R 2 *On a* $1 = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X=k) = \dfrac{a}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{a}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \dfrac{a}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$. *Or* $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}1^k 1^{n+1-k} = 2^{n+1}$ *donc* $1 = \dfrac{a\left(2^{n+1}-1\right)}{n+1}$ *et* $a = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$.

R 3 *On a* $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a}{k+1}k\binom{n}{k} = a\sum\limits_{k=0}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)\binom{n}{k}$. *Or* $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ *et* $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a}{k+1}\binom{n}{k} = 1$ *(somme des probas) donc* $E(X) = a2^n - 1 = \dfrac{(n+1)\,2^n - 2^{n+1}+1}{2^{n+1}-1} = \dfrac{n2^n - 2^n + 1}{2^{n+1}-1}$.

R 4 *Par la formule du transfert,* $E(X^2) = a\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k(k+1)-k}{k+1}\binom{n}{k} = a\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k(k+1)}{k+1}\binom{n}{k} - E(X)$. *Or* $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k(k+1)}{k+1}\binom{n}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$ *donc* $E(X^2) = an2^{n-1} - E(X)$. *On obtient finalement, en utilisant que* $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, *que* $V(X) = \dfrac{(n-1)\,4^n + (3n+n^2+2)\,2^{n-1}}{\left(2^{n+1}-1\right)^2}$

Problème:

Première partie: Etude d'un exemple

R 5 *On a* $R_\theta^2 + R_{2\theta} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2(\theta)-1 & -2\cos(\theta)\sin(2\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(2\theta) & 2\cos^2(\theta)-1 \end{pmatrix} = 2\cos(\theta)R_\theta - I_2$ *donc* $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ *est polynôme annulateur de* R_θ *(on peut aussi utiliser le théorème de Cayley Hamilton.*

R 6 *On vérifie que* M *est une matrice orthogonale. On peut aussi remarquer que* $\det(M) = +1$ *donc* $M \in \mathcal{SO}_4(\mathbb{R})$.

R 7 *On a* $M^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}M - I_n$ *donc* $P = X^2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}X + 1$ *est un polynôme annulateur de* M.

R 8 *On a* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $f(e_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *donc* $(e_1, f(e_1))$ *est libre donc* $\dim(F) = 2$.

On a $f^2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}f - id$ *donc* $f^2(e_1) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}f(e_1) - e_1 \in F$ *donc* $f(e_1) \in F$ *et* $f(f(e_1)) \in F$ *donc* $F = vect(e_1, f(e_1))$ *est stable par* f.

R 9 *Le sous-espace vectoriel F est stable par F et f est une isométrie vectorielle donc $F^\perp$ est stable par f.*
On complète $u_1 = e_1$ en une base orthonormée (u_1, u_2) de F. Soit (u_3, u_4) une base orthonormée de $F^\perp$.
La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est orthonormée par construction et donc base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
Comme F et $F^\perp$ sont stables par f, la matrice de f dans (u_1, u_2, u_3, u_4) est de la forme $M' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ avec A et B matrices carrées de taille 2.
Le sous espace F est stable par f. Posons f_F l'endomorphisme induit par f sur F. L'endomorphisme f_F est une isométrie vectorielle car $\forall x \in F$, $\|f_F(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$. Or $A = mat_{(u_1,u_2)}(f_F)$ et (u_1, u_2) est une base orthonormée de F donc $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. De même pour B.

R 10 *On a $\chi_M(x) = \chi_{M'}(x)$ car M et M' sont semblables donc $\chi_M(x) = \left|\begin{array}{c|c} xI_2 - A & 0 \\ \hline 0 & xI_2 - B \end{array}\right| = \chi_A(x) \times \chi_B(x)$*
On a donc $sp(A) \subset sp(M)$. Or $P = X^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}X + 1$ est un polynôme annulateur de M donc $sp(M)$ est contenu dans l'ensemble des racines de P qui est vide ($\Delta < 0$). On en déduit que $sp(A) = \emptyset$. On raisonne de même pour $sp(B)$.
Or $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
On en déduit que A est de la forme R_θ ou S_θ. Or $sp(S_\theta) = \{-1, 1\}$ car S_θ est une matrice de réflexion et $sp(A) = \emptyset$ donc A est une matrice de rotation.
On montre de même que B est une matrice de rotation.

R 11 *On a M et M' semblables et $P_0(M) = 0$ donc $P_0(M') = 0$. Par propriété des matrices diagonales par blocs $P_0(M') = \left(\begin{array}{c|c} P_0(A) & 0 \\ \hline 0 & P_0(B) \end{array}\right) = 0$ donc $P_0(A) = A^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}A + I_2 = 0$ donc $sp_{\mathbb{C}}(A)$ est contenu dans l'ensemble des racines de P_0 soit $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \pm i\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right\}$.*

R 12 *On a $A^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}A + I_2 = 0$ et A est de la forme R_θ et $A^2 - 2\cos(\theta)A + I_n = 0$.*
En soustrayant les égalités, $\frac{2}{\sqrt{3}}A = 2\cos(\theta)A$ donc $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\theta \equiv \theta_0\,[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\theta_0\,[2\pi]$. Le même raisonnement vaut pour B.

R 13 *On a $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.Posons $e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-u_1 + \sqrt{3}f(u_1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F$ et (u_1, u_2) est orthonormée (se vérifie facilement) donc base orthonormée de F ($\dim(F) = 2$).*
On a $f(e_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}u_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_2$ donc $mat_{(u_1,u_2)}(f_F) = R_{\theta_0}$

R 14 *On vérifie que $e_2 \perp e_1$ et $e_2 \perp e_1'$ donc $e_2 \in F^\perp$.*
On a $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-u_3 + \sqrt{3}f(u_3)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F^\perp$ car $F^\perp$ est stable par f.

R 15 *On obtient de même $mat_{(u_3,u_4)}(f_{F^\perp}) = R_{\theta_0}$. Soit $P = P_{(e_1,\ldots,e_4)\to(u_1,\ldots,u_4)} \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ car les deux bases sont orthonormées et $P^{-1}AP = mat_{(u_1,\ldots,u_4)}(f) = \left(\begin{array}{c|c} R_{\theta_0} & 0 \\ \hline 0 & R_{\theta_0} \end{array}\right)$.*

Deuxième partie: Réduction des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

R 16 *Comme* $sp(f) = \emptyset$ *le polynôme* χ_f *n'a pas de racines donc sa décomposition en irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$ *n'admet que des facteur de degré 2 à discriminant négatif.*
On en déduit que $\dim(E) = \deg(\chi_f)$ *est pair.*

R 17 *On a* $P(f) = P_1(f) \circ \cdots \circ P_k(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. *Si, pour tout* i $P_i(f)$ *est un isomorphisme alors* $P(f)$ *serait une isomorphisme donc non nul donc Il existe donc* i *tel que* $P_i(f)$ *n'est pas un isomorphisme donc pour lequel* $\ker(P_i(f)) \neq \{0_E\}$.

R 18 *Soit* $e \in \ker(P_i(f))$, $e \neq 0_E$.
- Si $P_i = X - \lambda$, $P_i(f) = f - \lambda_i id_E$ *donc* $(f - \lambda_i id_E)(e) = 0$ *donc* e *est un vecteur propre de* f *donc* $vect(e)$ *est stable par* f.
- Si $P_i = X^2 + aX + b$ *de discrimiant* < 0, *alors* $P_i(f) = f^2 + af + bid_E$. *Posons* $F = vect(e, f(e))$.
On a $e \in \ker(P_i(f))$ *donc* $(f^2 + af + bid_E)(e) = 0_E$ *donc* $f^2(e) = -af(e) - be \in F$ *et* $f(e) \in F$ *donc* F *est stable par* f.
De plus, si $f(e) = \lambda e$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $(f^2 + af + bid_E)(e) = 0_E = (\lambda^2 + a\lambda + b)e$ *donc* $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ *car* $e \neq 0_E$ *(vecteur propre). Par hypothèse,* $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ *n'admet pas de racine réelle donc* e *n'est pas vecteur propre donc* $\dim(F) = 2$.

R 19 *découle directement de la question précédente.*

R 20 *On suppose que* $sp(f) = \emptyset$ *donc* n *est pair,* $n = 2p$.

a *Montrons par récurrence sur* p *qu'il existe des sous-espaces vectoriels* $F_1, \ldots, F_p$ *de dimension* 2 *vérifiant:*
$$\begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p. \\ \forall (i,j) \in [[1,p]]^2,\ i \neq j \Rightarrow F_i \perp F_j. \quad : (C_p) \\ \forall (i,j) \in [1,p],\ F_i \text{ est stable par } f. \end{cases}$$
Pour $p = 1$, *il n'y a rien à démontrer.*
Supposons (C_p) *vérifiée.*
Soit f *isométrie vectorielle de* E *de dimension* $2p + 2$ *vérifiant* $sp(f) = \emptyset$.
En reprenant la réponse précédente, il existe F_1, *sous-espace stable par* f *de dimension* 1 *ou* 2.
Comme $sp(f) = \emptyset$, *aucun sous-espace de dimension* 1 *n'est stable par* f.
Soit F_1, *sous-espace stable par* f *de dimension* 2.
Le sous-espace $(F_1)^\perp$ *est stable par* f *et l'endomorphisme induit par* $f_{(F_1)^\perp}$ *sur* $(F_1)^\perp$ *est une isométrie vectorielle de* $(F_1)^\perp$ *et* $sp\left(f_{(F_1)^\perp}\right) \subset sp(f) = \emptyset$ *et* $\dim\left((F_1)^\perp\right) = 2p$ *donc* (HR) *il existe des sous-espaces vectoriels* $F_2, \ldots, F_{p+1}$ *de dimension* 2 *vérifiant:*
$$\begin{cases} (F_1)^\perp = F_2 \oplus \cdots \oplus F_{p+1}. \\ \forall (i,j) \in [[2,p+1]]^2,\ i \neq j \Rightarrow F_i \perp F_j. \\ \forall (i,j) \in [[2,p+1]],\ F_i \text{ est stable par } f_{(F_1)^\perp} \text{ donc par } f. \end{cases}$$
Pour $i \geq 2$, $F_i \subset (F_1)^\perp$ *donc* $F_1 \perp F_i$ *donc* (C_{p+1}) *est vérifié.*

b *L'endomorphisme induit par* f *sur* F_i *est une isométrie vectorielle du plan* F_i *qui n'admet pas de valeur propre (car* $sp(f) = \emptyset$*) donc ce n'est pas une réflexion donc (cas spécifique de la dimension* 2*) c'est une rotation plane.*

R 21 *On ne suppose plus que* $sp(f) = \emptyset$.
On a donc $sp(f) \subset \{-1, 1\}$.
Posons $F = \ker(f - id_E) \oplus \ker(f - id_E)$.
Le sous espace F *est stable par* f*: Si* $(u,v) \in \ker(f - id_E) \times \ker(f + id_E)$, $f(u + v) = u - v \in F$.
Le sous espace $F^\perp$ *est stable par* f *et on peut appliquer la question précédente à* $f_{F^\perp}$ *endomorphiosme induit par*

f sur $F^\perp$ car $F^\perp$ ne continet pas de vecteurs propres de f donc $sp\left(f_{F^\perp}\right)=\emptyset$.
il existe des sous-espaces vectoriels $F_1,\dots,F_p$ de dimension 2 vérifiant:
$$\begin{cases} F^\perp = F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_p. \\ \forall (i,j)\in[[1,p]]^2\ ,\ i\neq j\Rightarrow F_i\perp F_j. \\ \forall (i,j)\in[1,p]\ ,\ F_i \text{ est stable par } f. \end{cases}$$
L'endomorphisme induit par f sur F_i est une rotation.
Soit $b,b',b_1,\dots,b_p$ des bases orthonormées respectives de $\ker(f-id_E)$, $\ker(f+id_E)$, $F_1,\cdots,F_p$.
La famille juxtaposée $(b,b',b_1,\dots,b_p)$ est une base orthonormée de E car
- $E=F\oplus F^\perp$
- $F^\perp=F_1\oplus F_2\oplus\cdots\oplus F_p$ *et* $i\neq j\Rightarrow F_i\perp F_j$.
- $\ker(f-id_E)\perp\ker(f+id_E)$ *(exercice de cours)*

Dans cette base, la matrice de f est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_{n_2} & & & \vdots \\ \vdots & (0) & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R_{\theta_p} \end{pmatrix}$ *avec* $n_i\geq 0$.

R 22 *Il suffit d'appliquer la question précédente à l'endomorphisme canoniquement associé à M (dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel).*