DM8 (le mercredi 12 novembre 2025)

I Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée à coefficients complexes vérifiant $6A^2 - 5A + I_n = 0$.

Q 1 *Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de A et I_2.*

Q 2 *Justifier que A est diagonalisable et préciser $sp(A)$.*

Dans la suite, on note A' une matrice diagonale semblable à A et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.
On définit la suite de matrices (B_k) par $B_0 = A$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_{k+1} = B_k - B_k^2$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $B'_k = P^{-1}B_kP$.

Q 3 *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B'_{k+1} = B'_k - B'^2_k$.*

Q 4 *En déduire que la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.*

Problème:

On considère un espace préhilbertien réel E dont le produit scalaire noté $(.|.)$

Cas n=2 et n=3

Q 5 *Soit u et v deux vecteurs quelconques de E. On notre* $\mathrm{Gram}(u,v)$ *la matrice* $\begin{pmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) \\ (v \mid u) & (v \mid v) \end{pmatrix}$ *et $G(u,v)$ est le déterminant de la matrice* $\mathrm{Gram}(u,v)$*).*
Montrer que $G(u,v) \geq 0$. A quelle condition y a-t-il égalité ?

Q 6 *Soit u, v et w trois vecteurs quelconques de E. On note* $\mathrm{Gram}(u,v,w) = \begin{pmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) & (u \mid w) \\ (v \mid u) & (v \mid v) & (v \mid w) \\ (w \mid u) & (w \mid v) & (w \mid w) \end{pmatrix}$ *et*

$G(u,v,w) = \det(\mathrm{Gram}(u,v,w))$.

a *On suppose que w est orthogonal à u et v. Exprimer $G(u,v,w)$ en fonction de $G(u,v)$.*

b *On suppose que w est combinaison linéaire de u et v. Calculer $G(u,v,w)$.*

c *On suppose que $w = t + n$ avec t combinaison linéaire de u et v, et n orthogonal à u et v.*
Montrer que $G(u,v,w) = G(u,v)\|n\|^2$.

Q 7 *Etablir l'équivalence: (u,v,w) est libre $\Leftrightarrow G(u,v,w) \neq 0$.*

Cas n quelconque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_n$ des éléments de E.
Pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, on pose $g_{i,j} = (u_i \mid u_j)$.
La matrice $(g_{i,j})_{(i,j) \in [[1,n]]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$. Son déterminant est noté $G(u_1, \ldots, u_n)$.

Q 8 *On suppose la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ liée. Montrer que $G(u_1, \ldots, u_n) = 0$.*

Q 9 *On suppose la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ libre. On introduit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel $G = vect(u_1, \ldots, u_n)$ et on note $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [[1,n]]^2}$ la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de G à la base $(u_1, \ldots, u_n)$ de G.*
Montrer que $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n) = (A)^T \times A$. En déduire que $G(u_1, \ldots, u_n) > 0$.

Q 10 *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $k > 0$ et $(v_1, \ldots, v_k)$ une base quelconque de F.*
Soit $x \in E$. on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.
Etablir que $d(x, F) = \sqrt{\frac{G(v_1, \ldots, v_k, x)}{G(v_1, \ldots, v_k)}}$.

Une première application

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ (on ne demande pas de justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire). On pose $\alpha = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - (at + b)\right)^2 \,\mathrm{d}t$.

Q 11 *Interpréter d à l'aide de la distance d'un élément de E à un sous-espace vectoriel de E à préciser.*

Q 12 *Calculer le déterminant.* $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$.

Q 13 *En admettant que* $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}$, *donner la valeur de α.*

Décomposition en éléments simples

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \ldots, x_k$ des réels deux à deux distincts $k + 1$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\deg(P) \leq k$.
Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-x_0, \ldots, -x_k\}$, on pose $F(x) = \frac{P(x)}{(x - x_0) \times \cdots \times (x - x_k)}$.

Q 14 *On pose, pour $i \in [[0, k]]$,* $L_i = \dfrac{\prod\limits_{j \in [[0,k]], j \neq i} (X - x_j)}{\prod\limits_{j \in [[0,k]], j \neq i} (x_i - x_j)}$.
Justifier que $(L_0, \ldots, L_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et donner les coordonnées de P dans cette base.

Q 15 *En déduire qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que:*
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-x_0, \ldots, -x_k\}$, $F(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{\alpha_i}{x - x_i}$ *avec* $\alpha_i = \dfrac{P(x_i)}{\prod\limits_{j \in [[0,k]], j \neq i} (x_i - x_j)}$

I.1 Généralisation

Soit p un entier naturel non nul et $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ des réels tels que
$\forall i \in [[1, p]], a_i > 0, b_i \geq 0$ et $\forall (i, j) \in [[1, p]]^2$, $i \neq j \Longrightarrow b_i \neq b_j$.
On note $C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ le déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}\hat{)}$.

On a donc .$C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_p} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \frac{1}{a_p+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_p} \end{vmatrix} \in \mathbb{R}$.

On note $\Delta_p = \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{2p-1} \end{vmatrix}$.

Le but de cette partie est de donner une expression de

$$u_n = \inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(t^n - \left(a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0\right)^2\ \mathrm{d}t\right.$$

Q 16 *Montrer que* $u_n = \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$.

La suite de cette partie consiste à utiliser la partie précédente pour le calcul de u_n*.*

Pour x *réel n'appartenant pas à* $\{-b_1, \ldots, -b_p\}$*, on pose* $F(x) = \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{p-1})}{(x+b_1)\cdots(x+b_p)} = \dfrac{\prod\limits_{j\in[[1,p-1]]}(x-a_j)}{\prod\limits_{j\in[[1,p]]}(x+b_j)}$.

On note D *le déterminant d'ordre* p *:*

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & F(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & F(a_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}.$$

Q 17 *Montrer que* $D = F(a_p)\, C_{p-1}(a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1})$.

Q 18 *En utilisant la partie précédente, montrer que* $D = \alpha_p \times C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ *avec* $\alpha_p = \dfrac{\prod\limits_{1\leq j\leq p-1}(a_i+b_p)}{\prod\limits_{1\leq j\leq p-1}(b_p-b_j)}$.

Q 19 *En déduire une expression de* u_n *faisant intervenir des factorielles.*

Q 20 *Montrer que la suite* (u_n) *converge vers* 0.

Questions supplémentaires

Q 21 *Donner un équivalent de* u_n *au voisinage de* $+\infty$.

Q 22 *Donner une expression de* $C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ *sous forme de produit et quotient.*

DM 8 correction

Exercice:

R 1 *On a* $5A-6A^2=I_n$ *donc* $A(5I_n-6A)=I_n$*.donc* A *est inversible d'inverse* $(5I_n-6A)$.

R 2 *Les racines de* $6x^2-5x+1=0$ *sont* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{3}$ *donc le polynôme* $6X^2-5X+1$ *est scindé à racines simples donc la matrice* A *est diagonalisable et* $sp(A)\in\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$ *donc* A *est semblable à une*

matrice $A'=diag\left(\underbrace{\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}}_{p\ fois},\underbrace{\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{3}}_{n-p\ fois}\right)$ *avec* $p\in[[0,n]]$ *(p ou* $n-p$ *peut être nul.*

R 3 *On a* $B'_{k+1}=P^{-1}B_{k+1}P=P^{-1}\left(B_k-B_k^2\right)P=P^{-1}B_kP-P^{-1}B_k^2P=B'_k-B'^2_k$.

R 4 *On a* $B_0=A$ *donc* $B'_0=A'=diag\left(\underbrace{u_0,\ldots,u_0}_{p\ fois},\underbrace{v_0,\ldots,v_0}_{n-p\ fois}\right)$ *avec* $u_0=\frac{1}{2}$ *et* $v_0=\frac{1}{3}$

Or $B'_{k+1}=B'_k-B'^2_k$*.donc, en utilisant les propriétés de calcul sur les matrices diagonales, par récurrence on montre que*

$\forall k\in\mathbb{N},\ B'_k=diag\left(\underbrace{u_k,\ldots,u_k}_{p\ fois},\underbrace{v_k,\ldots,v_k}_{n-p\ fois}\right)$ *avec* $\forall k\in\mathbb{N},\ u_{k+1}=u_k-u_k^2:(R)$ *et* $v_{k+1}=v_k-v_k^2$.

Etude de la suite (u_k)*:*

On montre par récurrence que $u_k\in[0,1]$*, que la suite* (u_k) *est décroissante donc converge vers* l *puis que* $l=0$ *en passant à la limite dans la relation* (R) *et pareil pour* (v_k)*.*

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty}B'_k=0_{n,n}$*. Or* $B_k=PB'_kP^{-1}$ *donc, par continuité du produit matriciel,*

on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty}B_k=P\times 0_{n,n}\times P^{-1}=0_{n,n}$.

Problème:

R 5 $G(u,v)=\|u\|^2\|v\|^2-(u\mid v)^2\geq 0$ *en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et Il y a égalité ssi* u *et* v *sont colinéaires (cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).*

R 6 (u,v,w) *quelconques.*

a *Si* $w\in\{u,v\}^\perp$ *alors* $G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\mid u)&(u\mid v)&0\\(v\mid u)&(v\mid v)&0\\0&0&(w\mid w)\end{vmatrix}=G(u,v)\|w\|^2$.

b *Si* $w=\lambda u+\mu v$ *alors pour tout* $x\in E$*,* $(x\mid w)=\lambda(x\mid u)+\mu(x\mid v)$ *donc en notant* C_1,C_2,C_3 *les colonnes de* $\mathrm{Gram}(u,v,w)$ *on a* $C_3=\lambda C_1+\mu C_2$ *donc* $G(u,v,w)=0$.

c *On a* $(u\mid w)=(u\mid t)+(u\mid n)=(u\mid t)$ *et* $(w\mid w)=\|w\|^2=\|t\|^2+\|n\|^2$ *(pythgagore)*

donc $G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\mid u)&(u\mid v)&(u\mid t)\\(v\mid u)&(v\mid v)&(v\mid t)\\(t\mid u)&(t\mid v)&(t\mid t)+\|n\|^2\end{vmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}(u\mid t)\\(v\mid t)\\\|t\|^2+\|n\|^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(u\mid t)\\(v\mid t)\\\|t\|^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\|n\|^2\end{pmatrix}$ *donc*

en utilisant la trilinéarité du déterminant d'ordre 3,

$G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\mid u)&(u\mid v)&(u\mid t)\\(v\mid u)&(v\mid v)&(v\mid t)\\(t\mid u)&(t\mid v)&(t\mid t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(u\mid u)&(u\mid v)&0\\(v\mid u)&(v\mid v)&0\\(t\mid u)&(t\mid v)&\|n\|^2\end{vmatrix}=G(u,v,t)+\|n\|^2G(u,v)=\|n\|^2G(u,v)$

car $G(u,v,t)=0$ *d'après la question précédente.*

R 7 *Si* (u,v,w) *est libre alors* (u,v) *est libre et* $w \notin \mathrm{Vect}(u,v)$ *donc* $G(u,v) \neq 0$ *et* $n \neq 0$ *puis* $G(u,v,w) = G(u,v)\|n\|^2 \neq 0$. *Si* $G(u,v,w) = 0$ *alors* $G(u,v) = 0$ *ou* $n = 0$ *donc* (u,v) *liée ou* $w \in \mathrm{Vect}(u,v)$ *donc* (u,v,w) *est liée.*

R 8 *Notons* $C_1, \ldots, C_n$ *les colonnes de* $\mathrm{Gram}\,(u_1, \ldots, u_n)$.
Si $(u_1, \ldots, u_n)$ *est liée alors* $\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ *telle que* $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$ *et donc* $\forall x \in E$, $(x \mid \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0$ *donc* $\lambda_1 (x \mid u_1) + \cdots + \lambda_n (x \mid u_n) = 0$. *En remplacant* x *par* $u_1, \ldots, u_n$ *on obteint* $\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_n C_n = 0$ *et donc* $G(u_1, \ldots, u_n) = 0$.

R 9 *Posons* $A = (a_{i,j})\,, A^T = \left(a'_{j,i}\right)$ *avec* $a'_{j,i} = a_{i,j}$ *et* $A^T \times A = B = (b_{i,j})$
Par définition de la matrice de passage, $u_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k$ *donc* $(u_i \mid u_j) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k \mid \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j}$ *car* $(e_1, \ldots, e_p)$ *est orthonormée.*
et $b_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a'_{i,k} a_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = (u_i \mid u_j)$ *donc* $A^T \times A = \mathrm{Gram}\,(u_1, \ldots, u_n)$.
On en déduit que $G(u_1, \ldots, u_n) = \det\left(A^T \times A\right) = \det\left(A^T\right) \times \det(A) = (\det A)^2 > 0$ *car* A *est inversible.*

R 10 *Le sous-espace* F *étant de dimension finie, on peut écrire* $x = t + n$ *avec* $t \in F$ *et* $n \in F^\perp$ *où* t *est le projeté orthogonal de* x *sur* F.
D'après le cours, $d(x,F) = \|x - t\| = \|n\|$.
On a $(v_i|x) = (v_i|t) + (v_i|n) = (v_i|t)$ *car* $n \in F^\perp$ *et* $(x|x) = (t|t) + (n|n)$ *(pythagore)*

$$G(v_1, \ldots, v_k, x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_k) & (v_1|t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_k|v_1) & \cdots & (v_k|v_k) & (v_k|t) \\ (t|v_1) & \cdots & (t|v_k) & (t|t) + (n|n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_k) & (v_1|t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_k|v_1) & \cdots & (v_k|v_k) & (v_k|t) \\ (t|v_1) & \cdots & (t|v_k) & (t|t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_k) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_k|v_1) & \cdots & (v_k|v_k) & 0 \\ (t|v_1) & \cdots & (t|v_k) & (n|n) \end{vmatrix}$$

et donc $G(v_1, \ldots, v_k, x) = G(v_1, \ldots, v_k, t) + \|n\|^2 G(v_1, \ldots, v_k)$ *(en développant par rapport à la dernière colonne).*
Or $(v_1, \ldots, v_k, t)$ *est liée car* $t \in F$ *donc* $G(v_1, \ldots, v_k, t) = 0$ *donc* $G(v_1, \ldots, v_k, x) = \|n\|^2 G(v_1, \ldots, v_k)$.
Or $G(v_1, \ldots, v_k) \neq 0$ *car* $(v_1, \ldots, v_k)$ *est libre donc* $\|n\|^2 = \dfrac{G(v_1, \ldots, v_k, x)}{G(v_1, \ldots, v_k)}$
On a vu dans la question précédente que $G(u_1, \ldots, u_n) \geq 0$ *pour toute famille de vecteurs. On peut donc passer à la racine pour toute famille de* $d(x,F) = \|n\| = \sqrt{\frac{G(v_1, \ldots, v_k, x)}{G(v_1, \ldots, v_k)}}$ *car* $\|n\| \geq 0$.

R 11 *Posons* $P_0 = X^2$ *et* $P_{a,b} = aX + b$.
On a $\alpha = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (P_0 - P_{a,b})^2(t)\ \mathrm{d}t = \inf_{P_{a,b} \in vect(1,X)} \|P_0 - P_{a,b}\|^2$ *donc* $\alpha = d(P_0, F)^2$ *avec* $F = vect(1, X)$.

R 12 $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

R 13 *On a* $(X^i|X^j) = \int_0^1 t^{i+j}\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{j+1}$ *donc* $G(1, X) = \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ *et* $G(1, X, X^2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}$ *donc*
$\alpha = \dfrac{G(1, X, X^2)}{G(1, X)} = \frac{12}{2160} = \frac{1}{180}$.

R 14 *Fait en cours. On trouve que* $P = \sum\limits_{i=0}^{k} P(x_i)\, L_i$.

R 15 *On en déduit que si* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-x_0, \dots, -x_k\}$,

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-x_0)\times\cdots\times(x-x_k)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} P(x_i) L_i.}{\prod\limits_{j\in[[0,k]]}(x-x_j)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} P(x_i) \times \frac{\prod\limits_{j\in[[0,k]],j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\in[[0,k]],j\neq i}(x_i-x_j)}}{\prod\limits_{j\in[[0,k]]}(x-x_j)}$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{P(x_i)}{\prod\limits_{j\in[[0,k]],j\neq i}(x_i-x_j)} \frac{1}{(x-x_i)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha_i}{x-x_i} \text{ avec } \alpha_i = \frac{P(x_i)}{\prod\limits_{j\in[[0,k]],j\neq i}(x_i-x_j)}.$$

R 16 *Comme dans les question 11,et 13 on peut écrire*
$u_n = d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])^2 = \frac{G(1,X,\dots,X^n)}{G(1,X,\dots,X^{n-1})} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$.

R 17 *On a* $F(a_1) = \cdots = F(a_{p-1}) = 0$ *donc en développant selon la dernière colonne:*
$D = F(a_p) C_{p-1}(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1})$.

R 18 *En utilisant la partie précédente, avec* $k = p-1$ *et* $(x_0, \dots, x_k) = (-b_1, \dots, -b_p)$, *et* $P = \prod\limits_{1\leq j\leq p-1}(X-a_j)$

donc $\deg(P) = p - 1 \leq k$.
On a, pour $x \notin \{-b_1, \dots -b_p\}$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{(x+b_j)} \text{ avec } a_i = \frac{P(-b_i)}{\prod\limits_{j\in[[1,p]],j\neq i}(-b_i+b_j)} = \frac{\prod\limits_{1\leq j\leq p-1}(-b_i-a_j)}{\prod\limits_{j\in[[1,p]],j\neq i}(-b_i+b_j)} = \frac{\prod\limits_{1\leq j\leq p-1}(a_i+b_j)}{\prod\limits_{j\in[[1,p]],j\neq i}(b_i-b_j)}.$$

On en déduit que
$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & \sum\limits_{j=1}^{p}\frac{\alpha_j}{(a_1+b_j)} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & \sum\limits_{j=1}^{p}\frac{\alpha_j}{(a_2+b_j)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & \sum\limits_{j=1}^{p}\frac{\alpha_j}{(a_p+b_j)} \end{vmatrix} \underset{C_p\leftarrow C_p-\sum\limits_{i=1}^{p-1}\alpha_i C_i}{=} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & \frac{\alpha_p}{a_1+b_p} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & \frac{\alpha_p}{a_2+b_p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & \frac{\alpha_p}{a_p+b_p} \end{vmatrix}$$

donc $D = \alpha_p \times C_p(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$ *avec* $\alpha_p = \frac{\prod\limits_{1\leq j\leq p-1}(a_j+b_p)}{\prod\limits_{j\in[[1,p]],j\neq p}(b_p-b_j)}$.

R 19 *On a donc* $C_p(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p) = \dfrac{F(a_p)}{\alpha_p} C_{p-1}(a_1, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-1})$ *donc*

On prend $a_i = i - 1$ *et* $b_i = i$. *On a* $u_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \dfrac{C_p(0, \dots, n, 1, \dots, n+1)}{C_p(0, \dots, (n-1), 1, \dots, n)} = \dfrac{F(n)}{\alpha_n}$

$$\text{donc } u_n = \frac{\dfrac{\prod\limits_{j\in[[1,n]]}(n-(j-1))}{\prod\limits_{j\in[[1,n+1]]}(n+1+j)}}{\dfrac{\prod\limits_{1\leq j\leq n}((j-1)+n+1)}{\prod\limits_{j\in[[1,n+1]],j\neq n+1}(n+1-j)}} = \frac{\dfrac{n!}{\prod\limits_{k=n+2}^{2n+2}k}}{\dfrac{\prod\limits_{k=n+1}^{2n}k}{n!}} = \frac{\dfrac{n!}{\left(\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!}\right)}}{\dfrac{\left(\dfrac{(2n)!}{(n)!}\right)}{n!}} = \frac{(n)!^4}{2\times(2n)!\times(2n+1)!}.$$

R 20 *En utilisant que* $i + n \geq n$, *on peut montrer que* $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2\times(2n+1)}$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Questions supplémentaires

R 21 *Utiliser la formule de Stirling.*

R 22 *Utiliser* $C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \dfrac{F(a_p)}{\alpha_p} C_{p-1}(a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1})$

On aboutit à $C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p}(a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p}(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p}(a_i + b_j)}$.

1.

2. $F(a_1) = \cdots = F(a_{p-1}) = 0$ donc en développant selon la dernière colonne :

$D = F(a_p)\, C_{p-1}(a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1})$.
D'autre part, via $C_p \leftarrow C_p - (\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_{p-1} C_{p-1})\,, D = \lambda_p C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$.
d'oÃ¹ l'Ã©galitÃ© proposÃ©e.

1.

3. Raisonnons par rÃ©currence sur $p \geq 1$.

Pour $p = 1$: $C_1(a_1, b_1) = \frac{1}{a_1+b_1}$ ce qui correspond Ã la formule proposÃ©e (sachant qu'un produit sur le vide vaut 1.)
Supposons la propriÃ©tÃ© Ã©tablie au rang $p - 1 \geq 1$.
Au rang p : $C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p - b_i)}{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i + b_p)} F(a_p)\, C_{p-1}(a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1})$ avec
$F(a_p) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_p - a_i)}{\prod_{i=1}^{p}(a_p + b_i)}$ et par HR : $C_{p-1}(a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p-1}(a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p-1}(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq p-1}(a_i + b_j)}$ donc
$C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p}(a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq p}(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq p}(a_i + b_j)}$. RÃ©currence Ã©tablie. 4.a Pour $a_i = i$ et $b_i = i - 1$.
$\Delta_p = C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ donc $\Delta_p = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p}(j-i)^2}{\prod_{1 \leq i,j \leq p}(i+j-1)}$.
On peut aussi Ã©crire $\Delta_p = \frac{(1!2!\ldots(p-1)!)^3}{p!(p+1)!\ldots(2p-1)!}$ mais cela nâ€■est pas demandÃ©.
4.b Comme dans la partie III, $u_n = d\left(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right)^2 = \frac{G(1,X,\ldots,X^n)}{G(1,X,\ldots,X^{n-1})} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$.
Par suite $u_n = \frac{\prod_{i=1}^{n}(n+1-i)^2}{\left(\prod_{i=1}^{n}(i+n)\right)\left(\prod_{j=1}^{n}(n+j)\right)(2n+1)} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.
4.c $0 \leq u_n \leq \frac{1 \times \cdots \times n}{(n+1) \times \cdots \times (2n)} \frac{1 \times \cdots \times n}{(n+1) \times \cdots \times (2n)} \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \to 0$ donc $u_n \to 0$.

DS 3 correction

Exercice 1:

R 23 *On a* $rg(J)=1$ *donc* $\dim(\ker(J))=3$ *donc* 0 *est valeur propre de* J *et* $\dim(E_0(J))=\dim(\ker(J))=3$.

R 24 *On a* $J\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ *donc* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ *vecteur propre de* J *associé à la vecteur propre non nulle* 4.

R 25 *Soit* $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. $X\in E_0(A)\Leftrightarrow AX=0$.
Or $AX=0\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=0\Leftrightarrow x_1=-x_2-x_3-x_4$ *donc*

$$AX=0\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-x_2-x_3-x_4\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_2\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{U_2}+x_3\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{U_3}+x_4\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{U_4}\text{ avec }(x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^3.$$

On en déduit que $E_0(A)=vect(U_2,U_3,U_4)$ *et* (U_2,U_3,U_4) *est échelonnée donc libre donc base de* $E_0(A)$.

R 26 *On a donc* $\dim(E_4(J))\geq 1$ *et* $\dim(E_0(J))=3$ *donc* $\dim(E_4(J))+\dim(E_0(J))\geq 4$ *donc* J *est diagonalisable. De plus,* (U_1,U_2,U_3,U_4) *est libre (propriété des vecteurs propres donc* (U_1,U_2,U_3,U_4) *est une base de* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
Si f *est canoniquement associé à* A *et* b *la base canonique de* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ *on a* $mat_b(f)=A$.

De plus, $mat_{(U_1,U_2,U_3,U_4)}(f)=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=D=P^{-1}AP$ *avec* $P=P_{b\to(U_1,U_2,U_3,U_4)}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$.

R 27 *On a* $bJ+(a-b)I_4=M_{a,b}$ *donc* $M_{a,b}\in vect(I_4,J)$.
De plus, $P^{-1}M_{a,b}P=P^{-1}(bJ+(a-b)I_4)P=bP^{-1}JP+(a-b)P^{-1}I_4P=bD+(a-b)I_4$

donc $P^{-1}M_{a,b}P=\begin{pmatrix}4b+(a-b)&0&0&0\\0&a-b&0&0\\0&0&a-b&0\\0&0&0&(a-b)\end{pmatrix}$.

Exercice 2

R 28 *On remarque que* $U_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ *est vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* 5.
La deuxième valeur propre complexe λ *de* A *vérifie* $tr(A)=\lambda+3$ *donc* $\lambda=3$.
Or $AX=3X\Leftrightarrow -x_1+3x_2=0$ *donc* $U_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\in E_3(3)$.
Si $P=P_{(E_1,E_2)\to(U_1,U_2)}\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}$, *on a donc* $P^{-1}AP=mat_{(U_1,U_2)}\begin{pmatrix}5&0\\0&3\end{pmatrix}$.

R 29 *Polynôme caractéristique de* $M_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}$*:*
On trouve $\chi_M(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots-a_1x-a_0$. *voir l'exercice fait en cours.*

R 30 *On a* $B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$ *avec* $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{(-6,0,5)}$.

On a donc $\chi_B(x) = \det\left(\begin{array}{c|c} xI_2 - A & 0 \\ \hline 0 & xI_4 - M \end{array}\right) = \det(xI_2 - A) \times \det(xI_4 - M) = \chi_A(x) \times \chi_M(x)$.

R 31 *D'après la question* **??**, $\chi_M(x) = x^4 - 5x^2 + 6$. *Or* $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$
donc $\chi_M(x) = (x^2-2)(x^2-3) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$.
D'après la question **??**, $\chi_A(x) = (x-5)(x-3)$ *donc* $sp(B) = \left\{5, 3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.
La matrice B *admet* 6 *valeurs propres disctinctes donc la somme des dimensions des sous-espaces propres est supérieure ou égale à* 6 *donc* B *est diagonalisable.*

Problème: (CCP 2016 PSI extrait et modifié)

Cas $n = 2$: Puissances de $A(\alpha, \beta)$

R 32 *On vérifie que* $A(\alpha,\beta) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *donc* $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est vecteur propre de* $A(\alpha,\beta)$ *associé à la valeur propre* 1.
D'après le cours, si λ *est la deuxième valeur propre complexe de* $A(\alpha,\beta)$, *alors*
$1 + \lambda = tr\left(A(\alpha,\beta)\right) = 2 - \alpha - \beta = 1 + \lambda$ *donc* $\lambda = 1 - \alpha - \beta \in \mathbb{R}$ *donc* $\lambda \in sp(A)$.

R 33 *On a* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda < 1$ *car* $\alpha \in [0,1]$ *et* $\beta \in [0,1]$ *avec* $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ *donc* $A(\alpha,\beta)$ *admet deux valeur propres réelles distinctes donc est diagonalisable.*

R 34 *On a* $A(\alpha,\beta) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 = (1-\alpha-\beta)x_1 \Leftrightarrow \beta x_1 + \alpha x_2 = 0$. *Le vecteur* $U_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ *(qui est non nul) est vecteur propre de* $A(\alpha,\beta)$ *associé à la valeur propre* λ.
La famille (U_1, U_2) *libre (propriété des vecteurs propres) donc base de vecteurs propres ce qui montre que* $A(\alpha,\beta)$ *est diagonalisable avec*

$$P^{-1}A(\alpha,\beta)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ noté } D \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$$

R 35 *On a* $P^{-1}A(\alpha,\beta)P = D$ *donc* $PDP^{-1} = A(\alpha,\beta)$. *On montre par récurrence que*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A(\alpha,\beta)^p = PD^pP^{-1}$$

Or $P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + \alpha x_2 = y_1 \\ x_1 - \beta x_2 = y_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (\alpha+\beta)x_2 = y_1 - y_2 \\ (\alpha+\beta)x_1 = \beta y_1 + \alpha y_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(\beta y_1 + \alpha y_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(y_1 - y_2) \end{array}\right.$ *donc* $P^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $A(\alpha,\beta)^p = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^p \end{pmatrix}\dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta + \alpha\lambda^p & \alpha - \alpha\lambda^p \\ \beta - \beta\lambda^p & \alpha + \beta\lambda^p \end{pmatrix}$.

R 36 *Si* $0 \leq \alpha < 1$ *et* $0 \leq \beta < 1$ *avec* $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ *donc* $0 < \alpha + \beta < 2$ *et* $\lambda = 1 - \alpha - \beta$ *donc* $-1 < \lambda < 1$. *On en déduit que* $\lim\limits_{p \to +\infty} \lambda^p = 0$ *donc* $\lim\limits_{p \to +\infty} A(\alpha,\beta)^p = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

R 37 *Si* $(\alpha,\beta)=(1,1)$, *alors* $\lambda=-1$ *donc* $A(\alpha,\beta)^p=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-1)^p & 1-(-1)^p\\ 1-(-1)^p & 1+(-1)^p\end{pmatrix}$ *donc* $A(\alpha,\beta)^{2p}=I_2$ *et* $A(\alpha,\beta)^{2p+1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ *si* p *est impair. On a donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}A(\alpha,\beta)^{2p}=I_2\neq\lim\limits_{n\to+\infty}A(\alpha,\beta)^{2p+1}$. *La suite* $(A(\alpha,\beta)^p)$ *admet deux suites extraites ayant des limites disctinctes donc elle diverge d'après le résultat admis en début de problème sur les suites extraites.*

Généralités sur les matrices stochastiques

R 38 *Si* A *est stochastique, les coefficients d'une ligne sont positifs et de somme plus petite que* 1. *Ils sont donc tous plus petits que* 1 *et finalement tous dans* $[0,1]$.
Si A *est strictement stochastique, elle est stochastique à coefficients non nuls et ses coefficients sont donc tous dans* $]0,1]$. *Si, par l'absurde, on avait* $a_{i,j}=1$, *comme il y a au moins deux coefficients sur la ligne* i *et qu'ils sont* >0, *la somme sur la ligne* i *serait* >1 *ce qui est contradictoire avec le caractère stochastique. Ainsi, les coefficients sont tous dans* $]0,1[$.

R 39 *Soit* A *une matrice à coefficients positifs. Elle est donc stochastiques ssi* $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$ *pour tout* $i\in[[1,n]]$.
Or, $Ae=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1,j}\\ \sum_{j=1}^n a_{2,j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n a_{n,j}\end{pmatrix}$ *donc la condition devient* $Ae=e$ *c'est à dire que* e *est propre pour* A *associé à* 1.

R 40 *Soient* A,B *deux matrices de taille* n *et* $C=AB$. *On a* $\forall i,j,\ c_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$.
Si A *et* B *sont à coefficients positifs, il en est de même pour* C.
De plus $Ce=ABe=A\,(Be)=Ae=e$ *car* e *est vecteur propre de* A *et* B *associé à la valeur propre* 1. C *est donc stochastique.*

R 41 *En reprenant ce qui précède, Si* A *et* B *sont à coefficients strictement positifs, il en est de même pour* C *donc* C *est strictement stochastique.*

R 42 *Soit* A *une matrice stochastique et* $x\in\mathbb{C}^n$. *Posons* $Ax=(y_1,\dots,y_n)$. *Pour tout* i *on a*

$$|y_i|=\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right|\le\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}|x_j|\le\|x\|_\infty\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}=\|x\|_\infty$$

Or $\|Ax\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|y_i|$ *donc*

$$\|Ax\|_\infty\le\|x\|_\infty$$

Comme A^p *est aussi stochastique (récurrence immédiate à partir de la question précédente) on a aussi*

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \|A^px\|_\infty\le\|x\|_\infty$$

R 43 *Soit* λ *une valeur propre complexe de* A *et* x *un vecteur propre associé. On a* $Ax=\lambda x$ *et, avec la question précédente*

$$|\lambda|\|x\|_\infty=\|\lambda x\|_\infty=\|Ax\|_\infty\le\|x\|_\infty$$

Comme $\|x\|_\infty>0$ *(car* x *est vecteur propre et donc est non nul) on en déduit que* $|\lambda|\le 1$. *Ceci étant vrai pour toute valeur propre,* $\rho(A)\le 1$. *De plus,* 1 *est une valeur propre de* A *(car* A *est stochastique) donc* $\rho(A)\ge 1$ *donc* $\rho\,(A)=1$.

Disques de Gershgöring et matrices à diagonales strictement dominante

R 44 *Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé.*
On a $Ax = \lambda x$ donc $\forall i \in [[1, n]]$, $\sum_{j=0}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$ donc $(\lambda - a_{i,i}) x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j$.
Par inégalité triangulaire on en déduit que $|\lambda - a_{i,i}| \cdot |x_i| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| \, |x_j|$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal (un nombre fini non nul de réels admet un maximum). On a alors $|x_i| > 0$ (car x, vecteur propre, est non nul) et donc $|\lambda - a_{i,i}| \cdot |x_i| \leq |x_i| \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Comme $|x_i| > 0$ on peut conclure que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$$

R 45 *Soit λ un réel. Si $\lambda \in sp\,(M)$ alors il existe $i \in [[1, n]]$ tel que*
$|\lambda - i| = |\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n-1}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ *donc $\lambda \in \left[i - \frac{1}{n}, i + \frac{1}{n}\right]$.*
On en déduit que $sp\,(M) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left[i - \frac{1}{n}, i + \frac{1}{n}\right]$.

R 46 *Si, par l'absurde, A n'était pas inversible, on aurait $\lambda = 0$ valeur popre de A et d'après la question* **??**

$$\exists i \in [[1, n]]\,, \;\; |a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$$

ce qui contredit le caractère strictement dominant de la diagonale. Ainsi, toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

Valeur propre de module maximal d'une matrice strictement stochastique

R 47 *Posons $B = A_1 - I_{n-1}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a*

$$|b_{i,i}| = |a_{i,i} - 1| = 1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{i,j} + a_{i,n} < \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{i,j} \;\; \textit{car } a_{i,n} > 0$$

B est donc a diagonale dominante. On en déduit que B est inversible. Ses $n-1$ colonnes forment une famille libre donc, les $n-1$ premières colonnes de $A - I_n$ forment une famille libre donc

$$\mathrm{rg}(A - I_n) \geq n - 1$$

R 48 *Par le théorème du rang,* $\dim\left(\ker(A - I_n)\right) \leq 1$. *Or 1 est valeur propre de A donc*
$\dim\left(E_1\,(A)\right) = \dim\left(\ker(A - I_n)\right) \geq 1$ *donc* $\dim E_1\,(A) = 1$.
Or $e \in E_1\,(A)$ donc $E_1\,(A)$ admet (e) comme base.

R 49 *Soit λ une valeur propre de A. D'après la question* **??** *de la partie précédente,*
il existe i tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}| = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{i,j}$.

Supposons $|\lambda| = 1$.
Par l'inégalité triangulaire, $|\lambda - a_{i,i}| \geq \big||\lambda| - |a_{i,i}|\big| = |\lambda| - |a_{i,i}| = 1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{i,j} \geq |\lambda - a_{i,i}|$

donc $|\lambda - a_{i,i}| = |\lambda| - |a_{i,i}|$ soit $|\lambda - a_{i,i}| + |a_{i,i}| = |\lambda|$ (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) donc $\lambda - a_{i,i}$ et $a_{i,i}$ ont même argument. Comme $a_{i,i}$ est un réel > 0, ceci impose que $\lambda - a_{i,i}$ soit un réel > 0 et donc que λ soit un réel > 0. Comme $|\lambda| = 1$, ceci donne $\lambda = 1$. On en déduit que 1 est donc l'unique valeur propre de module 1.

Suite des puissances d'une matrice strictement stochastique

R 50 *La suite* $(A^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ *est extraite de la suite* (A^p) *qui converge vers* L *donc* $(A^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* L*.Or* $A^{2p} = A^p \times A^p$ *donc, par continuité du produit matriciel,* $(A^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* L^2 *donc* $L = L^2$*.*

R 51 *Soit* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *;*

$$\forall k \in [|1,n|],\ a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} M_j^{(p)} = M_j^{(p)}$$

En passsant au maximum sur k*, on en déduit que*

$$M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

De même

$$\forall k \in [|1,n|],\ a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} m_j^{(p)} = m_j^{(p)}$$

En passsant au maximum sur k*, on en déduit que*

$$m_j^{(p+1)} \geq m_j^{(p)}$$

$m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)}$ *est immédiat (minimum plus petit que maximum). Comme* M *et toutes ses puissances sont strictement stochastiques, tous les coefficients sont* > 0 *et* $m_j^{(p)} > 0$*. Finalement*

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

R 52 *On note* k *un indice tel que* $a_{k,j}^{(p+1)} = m_j^{(p+1)}$*. On a alors*

$$\begin{aligned}
m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} &= a_{k,j}^{(p+1)} - m_j^{(p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} - \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} m_j^{(p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{k,i}}_{\geq m} \underbrace{(a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)})}_{\geq 0} \\
&\geq m \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)})
\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont ≥ 0 *et l'un vaut* $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$ *et donc*

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

De même, On note ℓ *un indice tel que* $a_{\ell,j}^{(p+1)} = M_j^{(p+1)}$*. On a alors*

$$\begin{aligned}
M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} &= M_j^{(p)} - a_{\ell,j}^{(p+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{\ell,i} M_j^{(p)} - \sum_{i=1}^{n} a_{\ell,i} a_{i,j}^{(p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{\ell,i}}_{\geq m} \underbrace{(M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)})}_{\geq 0} \\
&\geq m \sum_{i=1}^{n} (M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)})
\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont ≥ 0 *et l'un vaut* $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$ *et donc*

$$M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

R 53 *On a tout d'abord*

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} = \left(M_j^{(p+1)} - M_j^{(p)}\right) + \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right) + \left(m_j^{(p)} - m_j^{(p+1)}\right)$$

Le premier terme est majoré avec la seconde inégalité de la question précédente. Le troisième est majoré grâce à la première inégalité. On obtient

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

R 54 *On a* $m \leq \frac{1}{2}$ *car le plus petit coefficient de* M *est sur une ligne contenant au moins deux éléments dont le plus petit est* m *et dont la somme est* 1 *donc* $1-2m \geq 0$ *et* $m > 0$ *donc* $0 \leq 1-2m < 1$.
Par récurrence (d'après la question précédente)

$$0 \leq M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \leq (1-2m)^p(M_j^{(0)} - m_j^{(0)})$$

Or $\lim_{p\to+\infty}(1-2m)^p = 0$ *donc* $\lim_{p\to+\infty} M_j^{(p)} - m_j^{(p)} = 0$.
On a vu que la suite $\left(M_j^{(p)}\right)$ *est décroissante et la suite* $\left(m_j^{(p)}\right)$ *est croissante donc ces suites sont adjacentes et convergente donc vers une même limite.*

R 55 *En notant* l_j *la limite commune à* $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$*, comme* $m_j^{(p)} \leq a_{k,j}^{(p)} \leq M_j^{(p)}$ *pour tout* k *donc,* $\lim_{p\to+\infty} a_{k,j}^{(p)} = l_j$ *indépendant de* k*. La suite* (A^p) *converge donc vers la matrice* L *dont la* $j^{\text{ième}}$ *colonne est* $l_j \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *dont les lignes valent toutes* $(l_1, \ldots, l_n)$.
On a $a_{k,j}^{(p)} \geq 0$*, donc* $l_j = \lim_{p\to+\infty} a_{k,j}^{(p)} \geq 0$.
De même, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} = 1$ *donc, en passant à la limite,* $\sum_{j=1}^{n} l_j = 1$ *donc* L *est stochastique.*
Les lignes de L *sont égales donc* $rg\,(L) \leq 1$ *et* $\sum_{j=1}^{n} l_j = 1$ *donc* $L \neq 0$ *donc* $rg\,(L) = 1$.
On sait d'après la question **??** *que* L *est une matrice de projection donc* f *est une projection sur* $\mathrm{Im}\,(f)$ *qui est donc de dimension* 1*. Or* L *est stochastique donc* $Le = e$ *donc* $f\,(e) = e$ *donc* $e \in \mathrm{Im}\,(f)$ *qui est de dimension* 1 *donc* f *est une projection sur* $\mathrm{Im}\,(f) = vect\,(e)$.

R 56

R 57

1. Soit $F(X) = \frac{(X-a_1)\cdots(X-a_{p-1})}{(X+b_1)\cdots(X+b_p)}$.

   RÃ©aliser la dÃ©composition en Ã©lÃ©ments simples de F.

1.

2. On note D le dÃ©terminant d'ordre p :

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & F(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & F(a_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}.$$

En calculant D de deux faÃ§ons, Ã©tablir :

$$F(a_p)\, C_{p-1}(a_1,\ldots,a_{p-1},b_1,\ldots,b_{p-1})=\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}C_p(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p).$$

1.

3. En déduire : $C_p(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p)=\frac{\prod_{1\le i<j\le p}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\le i,j\le p}(a_i+b_j)}$. 4.a Calculer $\Delta_p=\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{2p-1} \end{pmatrix}$

$M_p(\mathbb{R})$.

On pourra se contenter d'une expression comportant un ou plusieurs $\prod(\ldots)$.

4.b En déduire la valeur de $u_n=\inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n}\int_0^1\left(t^n-(a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0\right)^2\,\mathrm{d}t$. On exprimera le rÃ©sultat Ã l'aire de nombres factoriels.

4.c Quelle est la limite de (u_n) ?

Pour $i\in[[1,p]]$, on pose, $P_i=\prod_{1\le j\le p, j\neq i}(X+b_j)$ et $P=\prod_{1\le j\le p-1}(X+a_j)$

Q 23 *Montrer que la famille $(P_1,\ldots,P_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.*

Q 24 *Déterminer $(\lambda_1,\ldots\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que $P=\sum_{i=1}^{p}\lambda_iP_i$.*

Q 25 *En calculant D de de deux manières différentes, montrer que*

$$F(a_p)\, C_{p-1}(a_1,\ldots,a_{p-1},b_1,\ldots,b_{p-1})=\frac{\prod_{i=1}^{p-1}(a_i+b_p)}{\prod_{i=1}^{p-1}(b_p-b_i)}C_p(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p).$$

Q 26 *En déduire :*

$$C_p(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_p)=\frac{\prod_{1\le i<j\le p}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le p}(b_j-b_i)}{\prod_{1\le i,j\le p}(a_i+b_j)}$$

Q 27