Endomorphismes antisymétriques

Soit E un espace euclidien. On note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y.
Soit B base orthonormée de E et u un endomorphisme de E.
On dit que u est antisymétrique si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle .$$

On note $0_{p,q}$ la matrice nulle à n lignes et p colonnes.

1. Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.
   (on considérera $\langle u(z), z\rangle$ avec z bien choisi).

2. Montrer que si u est antisymétrique alors sa matrice dans B est antisymétrique.

3. Montrer que si la matrice de u dans B est antisymétrique alors u est un endomorphisme antisymétrique.

4. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles de taille n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer sa dimension (on pourra commencer par le cas $n = 3$).

5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}(E)$ des endomorphismes antisymétriques de E est un espace vectoriel et préciser sa dimension.
   On suppose dans la suite que u est antisymétrique.

6. Montrer $\det(u) = (-1)^n \det(u)$. En déduire que si u est bijectif, alors E est de dimension paire.

7. Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \ker(u)^{\perp}$. En déduire que $\operatorname{Im}(u) = \ker(u)^{\perp}$.

8. Montrer que si un sous-espace vectoriel F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

9. Soit un réel λ. Montrer que si λ est valeur propre de u alors $\lambda = 0$. Montrer que $u \circ u$ est diagonalisable. Montrer que les valeurs propres de $u \circ u$ sont négatives ou nulles.

10. Que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice antisymétriques?

11. Soit e un vecteur propre de $u \circ u$ vérifiant $u(e) \neq 0$. Montrer que $G = vect(e, u(e))$ est un plan vectoriel stable par u. Montrer que la matrice de l'endomorphisme induit par u sur G dans une base orthonormée de G est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ et $a \neq 0$.

12. Montrer que u induit sur $\operatorname{Im}(u)$ un endomorphisme antisymétrique bijectif. En déduire que $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension paire.

13. Dans cette question on suppose que u est bijectif et $\dim(E) = 2k$. Montrer que si $k \neq 0$, il existe k plans vectoriels $P_1, \ldots, P_k$ orthogonaux deux à deux et stables par u tels que $E = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$.

14. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par bloc de la forme $\begin{pmatrix} 0_{p,p} & & & \\ & D_1 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & D_k \end{pmatrix}$ avec $0_{p,p}$, matrice carrée nulle de taille $p \leq n$ et D_i matrice carrée de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$ et $a_i \neq 0$.

CORRECTION

1. $(\Rightarrow) : \forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle$ donc $\langle u(x), x\rangle = 0$.
$(\Leftarrow)$: $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$ or $\langle u(x+y), x+y\rangle = \langle u(x)+u(y), x+y\rangle = \langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle$ donc u est antisymétrique.

2. Soit $M = mat_B(u) = (m_{i,j})$. La base B est orthonormée donc $m_{i;j} = \langle u(e_j), e_i\rangle = -\langle e_j, u(e_i)\rangle = -m_{j,i}$ donc M est antisymétrique.

3. Soit X, Y vecteurs coordonnées de x, y dans B. On a $\langle u(x), y\rangle = (MX)^T Y = X^T M^T \times Y = -X^T \times MY = -\langle x, u(y)\rangle$ donc u est un endomorphisme antisymétrique.

4. Soit $(A,B) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$. On a $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T = -(\lambda A + \mu B)$ donc $\lambda A + \mu B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $A = (a_{i,j})$. On a $A = \sum\limits_{(i,j)\in[|1,n|]^2} a_{i,j} E_{i,j}$. Si A est antisymétrique, $a_{i,i} = 0$ et $a_{j,i} = -a_{i,j}$ donc $A = \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{j,i})$ donc la famille $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$ est donc génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
De plus, si $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}(E_{i,j} - E_{j,i}) = 0$, alors A est nulle donc $\forall (i,j)$, $a_{i,j} = 0$ donc la famille $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$ est libre donc base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = 1 + 2 + + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

5. Soit B une base orthonormée de E. L'application $\varphi : M \mapsto u$ endomorphisme de E tel que $M = mat_B(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(E)$ et l'image de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par φ est l'ensemble $\mathcal{A}(E)$ des endomorphismes de E donc $\mathcal{A}(E)$ est un espace vectoriel et $\dim(\mathcal{A}(E)) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

6. Soit B une base orthonormée de E et $M = mat_B(u)$. On a $\det\left(M^T\right) = \det(-M) = (-1)^n \det(M)$ et $\det\left(M^T\right) = \det(M)$ donc $\det(u) = (-1)^{\dim(E)} \det(u)$. Si u est bijectif, alors $\det(u) \neq 0$ donc $(-1)^{\dim(E)} = 1$ donc E est de dimension paire.

7. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Montrons que $y \in \ker(u)^{\perp}$, c'est-à-dire que $\forall z \in \ker(u)$, $\langle y, z\rangle = 0$. $y \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ donc $\langle y, z\rangle = \langle u(x), z\rangle = -\langle x, u(z)\rangle = -\langle x, 0_E\rangle = 0$. On en déduit que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)^{\perp}$. Par ailleurs, $\dim\left(\ker(u)^{\perp}\right) = n - \dim(\ker(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u))$ donc $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)^{\perp}$.

8. On suppose que F est stable par f. Montrons que $F^{\perp}$ est stable par f. Soit $x \in F^{\perp}$. Montrons $u(x) \in F^{\perp}$ c'est-à-dire que $\forall y \in F$, $\langle u(x), y\rangle = 0$. Soit $y \in F$;t $y \in F$. On a $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle = 0$ car $x \in F^{\perp}$ et $y \in F$ donc $u(y) \in F$.

9. Soit x un vecteur propre associé à λ. On a $\langle u(x), x\rangle = 0$ donc $\langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2 = 0$ donc $\lambda = 0$ (car $x \neq 0$). On a $\langle u \circ u(x), y\rangle = -\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u \circ u(y)\rangle$ donc $u \circ u$ est un endomorphisme symétrique donc diagonalisable. Soit x un vecteur propre de $u \circ u$ associé à λ. On a $\langle u \circ u(x), x\rangle = -\langle u(x), u(x)\rangle = -\|u(x)\|^2$ et $\langle u \circ u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$ donc $\lambda \leq 0$. On a $u \circ u$ endomorphisme symétrique et $sp(u \circ u) \subset \mathbb{R}$.

10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in sp(M)$ alors $\lambda^2 \in sp(M^2) \subset \mathbb{R}_-$ d'après la question précédente donc $\lambda = 0$.

11. On a $\dim(G) = 2$: sinon on aurait $u(e) = \lambda e$ et donc $\lambda = 0$ donc $u \circ u(e) = 0_E$. De plus $u(e) \in G$ et $u(u(e)) = \mu e \in G$ donc G est stable par .On note v l'endomorphisme induit par u sur G et b une base orthonormée de G. L'endomorphisme v est antisymétrique donc $mat_b(v)$ est antisymétrique donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ car $v \neq 0$.

12. Le sous-espace $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u (classique) On note w l'endomorphisme (antisymétrique) induit par u sur $\mathrm{Im}(u)$. On a $\ker(w) = \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(u)^{\perp} = \{0\}$ donc w est un bijectif ($\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie). D'après Q6 appliqué à w, $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension paire.

13. Montrer par récurrence sur k qu'il existe k plans vectoriels $P_1, \ldots, P_k$ stables par u tels que $E = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$. Si $k = 1$, $E = P_1$ est un plan vectoriel stable par u. Supposons la propriété vraie pour $k-1$ et E de dimension $2k$. Soit e un vecteur propre de $u \circ u$. Le sous-espace $P_1 = vect\,(e, u\,(e))$ est un plan stable par u. Le sous-espace $P_1^{\perp}$ est aussi stable par u. En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par u sur $P_1^{\perp}$(de dimension $2k-2$), il existe des plans vectoriels orthogonaux deux à deux stables par u, $P_2, \ldots, P_k$ tels que $P_1^{\perp} = P_2 \oplus \cdots \oplus P_k$. On a $E = P_1 \oplus P_1^{\perp} = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$ et su $i \geq 2$, $P_1 \perp P_i$ car $P_i \subset P_1^{\perp}$.

14. On a $E = \ker\,(u) \oplus \operatorname{Im}\,(u)$. On peut appliquer Q13 à l'endomorphisme w (cf Q12): $\operatorname{Im}\,(u) = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$. donc $E = \ker\,(u) \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$. En juxtaposant des BON de ces sous-espaces vectoriels, on obtient une BON B de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par bloc de la forme voulue.