CENTRALE PC 2009
Math 1

Partie I : préliminaires

I.A.1) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $u(n,p)$ est défini et positif. De plus $u(n,p) \sim_{n->+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$. et comme $p+1>1$

$$\boxed{\text{La série } \sum_n u(n,p) \text{ converge}}$$

I.A.2) On sait déjà que la série converge. De plus la suite $(1/n)$ converge donc :

$$\sigma(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \lim_{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\boxed{\sigma(1) = 1}$$

I.A.3) On simplifie la fraction :

$$u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)} = \frac{n+p-n}{n(n+1)\cdots(n+p)} = p.u(n,p)$$

$$\boxed{u(n,p-1) - u(n+1,p-1) = p.u(n,p)}$$

I.A.4) Ce qui donne comme $p>0$

$$u(n,p) = \frac{u(n,p-1)}{p} - \frac{u(n+1,p-1)}{p}$$

Donc $u(n,p)$ est du type $a(n+1)-a(n)$ avec $a(n) = -\frac{u(n,p-1)}{p}$. D'après l'équivalent du **I.A.1)** $\lim(a_n) = 0$ et comme $a_1 = \frac{1}{p}.\frac{1}{1.2.\cdots p} = \frac{1}{p.p!}$ on a

$$\boxed{\text{pour } p \geq 2 \text{ , } \sigma_p = \frac{1}{p.p!}}$$

le résultat reste vrai si $p=1$

I.B) La fonction $t->t^q$ est continue décroissante sur $[1,+\infty[$ donc

$$\forall k \geq 2 \text{ , } \forall t \in [k-1,k] \text{ , } \frac{1}{k^q} \leq \frac{1}{t^q}$$

On intègre sur $[k-1,k]$(bornes dans le bon sens) :

$$\forall k \geq 2 \text{ , } \frac{1}{k^q} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{t^q}$$

On fait la somme de $N+1(\geq 2)$ à M et on fait tendre M vers $+\infty$. comme $q \geq 2$, la série $\sum \frac{1}{k^q}$ converge et l'intégrale $\int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^q}$ converge aussi et donc

$$\forall N \geq 1 \text{ , } \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^q} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^q} = \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}$$

$$\boxed{\forall q \geq 2 \text{ , } \forall N \geq 1 \text{ , } \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^q} \leq \frac{1}{(q-1)N^{q-1}}}$$

Partie II : accélération de convergence

II.A.1 et 2) On remarque que comme $x>0$ les dénominateurs sont tous non nuls.

- si $p=2$ on veut :

$$\forall x>0, \frac{1}{x^3} = \frac{a_2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{b_2x+c_2}{x^3(x+1)(x+2)}$$

Soit en réduisant au même dénominateur :

$$\forall x>0 \text{ , } (x+1)(x+2) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

ce qui donne :

$$\boxed{a_2 = 1, b_2 = 3, c_2 = 2}$$

D'où l'existence (et même l'unicité de a_2, b_2 et c_2)

- On suppose la relation vérifiée au rang p :

  Pour prouver la relation au rang $p+1$ il suffit de décomposer pour $x>0$:

$$\frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)\cdots(x+p)} = \frac{a_{p+1}}{x(x+1)\cdots(x+p)(x+p+1)} + \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^3(x+1)\cdots(x+p)(x+p+1)}$$

  En éliminant les dénominateurs communs il reste :

$$\frac{b_p x + c_p}{x^2} = \frac{a_{p+1}}{(x+p+1)} + \frac{b_{p+1}x + c_{p+1}}{x^2(x+p+1)}$$

  Soit en réduisant au même dénominateur :

$$(b_p x + c_p)(x+p+1) = a_{p+1}x^2 + b_{p+1}x + c_{p+1}$$

  et donc la relation de récurrence :

$$\boxed{a_{p+1} = b_p \ , \ b_{p+1} = c_p + (p+1)b_p \ , \ c_{p+1} = (p+1)c_p}$$

  On vérifie par récurrence que $\forall p \geq 2 \ , \ (a_p, b_p, c_p) \in \mathbb{N}^3$

II.A.3) Vue la formule donnant c_p on a $\forall p \geq 2, c_p = p!$ et donc $c_p > 0$
On justifie alors par récurrence que $b_p \geq c_p$:

- si $p=2$ on a bien $3 \geq 2$
- Si $b_p \geq c_p$, alors comme $p+1>0$, $(p+1)\,b_p \geq (p+1)\,c_p$ et comme $c_p \geq 0$ on a bien $b_{p+1} \geq c_{p+1}$

II.A.4) Un calcul à la main ou à la machine donne : $b_2 = 3$, $b_3 = 11$, $b_4 = 50$ et donc $a_3 = 3$, $a_4 = 11$

	2	3	4
a	1	3	11
b	3	11	50
c	2	6	24

Ce qui donne

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{3}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{11}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} + \frac{50x+24}{x^3(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

II.B.1) D'après la relation du $I.B)$ il suffit d'avoir :

$$\frac{1}{2N^2} \leq 5.10^{;5}$$

soit $10^{-4}N^2 \geq 1$. Il suffit de prendre $\boxed{N=100}$
II.B.2) On a

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \leq b_4 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} + c_4 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^7}$$

en minorant $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ par n^4
Soit en utilisant **I.B.1)** et **II.A.4)**

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \leq 50\frac{1}{5.N^5} + 24\frac{1}{6.N^6} = \frac{10}{N^5} + \frac{4}{N^6}$$

On a

$$\frac{1}{k^3} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{11}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} + \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

On ajoute ces égalités :

$$\xi(3) = \sigma(2) + 3.\sigma(3) + 11\sigma(4) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

On décompose :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}+\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

Pour avoir $\xi(3)$ à ε près il suffit donc (en négligeant les erreurs d'arrondi) d'avoir $\sum_{k=1}^{N+1}\frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\leq\varepsilon$ soit $\frac{10}{N^5}+\frac{4}{N^6}\leq 5.10^{-5}$.

La machine à calculer nous dit que la racine positive de $\frac{10}{N^5}+\frac{4}{N^6}=5.10^{-5}$ est comprise entre 11 et 12.Il suffit donc de prendre $N=12$ qui donne $\frac{10}{N^5}+\frac{4}{N^6}\leq 4,2.10^{-5}$

$$\xi(3)=\sigma(2)+3.\sigma(3)+11\sigma(4)+\sum_{k=1}^{12}\frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\pm\varepsilon$$

les 3 premiers termes sont connus:

$$\xi(3)=\frac{1}{4}+3.\frac{1}{18}+11.\frac{1}{96}+\sum_{k=1}^{12}\frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\pm\varepsilon$$

Reste à utiliser sa machine à calculer :

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}=0,6707885152$$

ce qui donne

$$\xi(3)=1.202038515\pm 4,2.10^{-5}$$

La valeur obtenue est bien une valeur par défaut car $\sum_{k=1}^{N+1}\frac{50k+24}{k^3(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$ est un réel positif comme somme de réels positifs.

$$\boxed{\text{une valeur approchée de } \xi(3) \text{ et } 1.202038 \text{ à } 5.10^{-5} \text{ par défaut}}$$

Partie III : séries factorielles

III.A.1) On a (dénominateur non nul) :

$$\begin{aligned}\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)} &= n.\frac{1}{x+n}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^x=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x=\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x(x-1)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= 1+\frac{x(x-1)}{2}.\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne (les quantités sont positives donc les ln existent)

$$\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)=\frac{x(x-1)}{2}.\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Comme $2>1$ $\boxed{\text{la série } \sum\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right) \text{ converge absolument.}}$

III.A.2) la série converge. On peut donc noter $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln(w_n(x))-\ln(w_{n-1}(x))\right]=S(x).$$

et donc

$$\lim_{n->+\infty}(\ln(w_n(x))=S(x)+\ln(w_0(x))$$

et donc

$$\lim_{n->+\infty}(w_n(x))=\exp\left(S(x)\right)$$

$l(x)=\exp\left(S(x)\right)$ est bien un réel strictement positif.

III.B) la question précédente nous donne tout de suite un équivalent :

$$|a_nu_n(x)|\sim l(x)\,|a_nv_n(x)|$$

La série $\sum a_n u_n(x)$ converge absolument si et seulement si la série $\sum l(x) a_n v_n(x)$ converge absolument, ce qui équivaut car $l(x) \neq 0$ à la convergence absolue de la série $\sum a_n v_n(x)$.

$$\boxed{\sum a_n u_n(x) \text{ converge absolument si et seulement si } \sum a_n v_n(x) \text{ converge absolument}}$$

III.C.1) Chaque fonction $a_n u_n$ est continue décroissante positive sur $]0, +\infty[$. De plus la série $\sum a_n u_n(x)$ converge normalement sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$ car

$$|a_n u_n(x)| \leq |a_n| \, u_n(x) \leq |a_n| \, u_n(\alpha)$$

et comme $\alpha > 0$, $\sum |a_n u_n(\alpha)|$ converge par définition de $\mathcal{A}$.

f_a est donc une somme de série de fonctions continues qui converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$

$$\boxed{f_a \text{ est continue sur }]0, +\infty[}$$

III.C.2) La majoration $|a_n u_n(x)| \leq |a_n| \, u_n(\alpha)$ est aussi valable sur $[\alpha, +\infty[$, et donc on a aussi convergence normale sur $[\alpha, +\infty[$. Chaque fonction u_n tend vers 0 si x tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\lim_{x->+\infty} (f_a(x)) = 0}$$

III.D.1) Si on prend : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!}$ on a $n^2 \frac{v_n(x)}{n!} \sim \frac{n^{2-x}}{n!} -> 0$ et donc $\sum \frac{v_n(x)}{n!}$ converge absolument. Donc d'après **III.B.**

$$\boxed{(\tfrac{1}{n!}) \in \mathcal{A}}$$

III.D.2) Si on prend : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ la série $\sum v_n(x)$ est une série de Riemann qui converge seulement pour $x > 1$

$$\boxed{(1) \notin \mathcal{A}}$$

III.E.1) u_n est l'inverse d'un polynôme n'ayant pas de racine sur $]0, +\infty[$ donc y est de classe C^1.

Tous les facteurs de u_n sont positifs on peut donc développer $\ln(u_n)$ et dériver l'expression :

$$\ln(u_n(x)) = \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$$

et donc :

$$\frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$$

le sujet suggère de montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)$$

C'est une comparaison série-intégrale . comme $t -> 1/t$ décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$ (idées du **I.B)** avec $q = 1$)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \leq \int_x^{x+n} \frac{dt}{t} = \ln(x+n) - \ln(x)$$

$$\boxed{\forall x > 0 \ , \ |u_n'(x)| \leq u_n(x) \left(\tfrac{1}{x} + \ln(\left(1 + \tfrac{n}{x}\right))\right)}$$

III.E.2) On sait déjà que pour tout n , la fonction $x -> a_n u_n(x)$ est C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $\sum a_n u_n(x)$ converge simplement sur ce domaine.

Pour pouvoir dire que la somme est C^1 et pouvoir dériver termes à termes il reste à prouver la convergence normale sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$ de $\sum a_n u_n'(x)$.

Or

$$|a_n u'_n(x)| \leq |a_n| \, u_n(x) \left(\frac{1}{x} + \ln(\left(1 + \frac{n}{x}\right)\right) \leq |a_n| \, u_n(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} + \ln(\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)\right)$$

Or $\sum |a_n| \, u_n(\alpha)$ converge .Il suffit de prouver la convergence de $\sum |a_n| \, u_n(\alpha) \ln(\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right)$

Comme

$$\ln(\left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) = \ln(n) + \ln(\frac{1}{n} + \frac{1}{\alpha}) = \ln(n) + O(1) \sim \ln(n)$$

on se ramène à l'étude de $\sum |a_n| \, u_n(\alpha) \ln(n)$ .On prend $\alpha' \in]0, \alpha[$. Comme $\alpha' > 0$, $\sum |a_n| \, u_n(\alpha')$ converge.

Mais

$$|a_n|\,u_n(\alpha)\ln(n) = (|a_n|\,u_n(\alpha'))\,\frac{u_n(\alpha)\ln(n)}{u_n(\alpha')} \sim (|a_n|\,u_n(\alpha'))\,\frac{l(\alpha')}{l(\alpha)}\frac{(n+1)^{\alpha'}\ln(n)}{(n+1)^{\alpha}}$$

et comme

$$\lim\left(\frac{\ln(n)}{(n+1)^{\alpha-\alpha'}}\right) = 0$$

on a :

$$|a_n|\,u_n(\alpha)\ln(n) << |a_n|\,u_n(\alpha')$$

ce qui assure la convergence absolue de la série $\sum |a_n|\,u_n(\alpha)\ln(n)$

$$\boxed{f_a \text{ est } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$$

Partie 4 : représentation intégrale

IV.A.1) On a $n+1$ polynômes dans un espace vectoriel de dimension $n+1$. Il suffit de montrer que la famille est libre. Or si on prend une famille $(\lambda_k)_{k=0}^n$ telle que $\sum \lambda_k P_k = 0$ la valeur en $-j$ donne

$P_k(-j) = \prod_{i\neq k}(-j+i)\begin{cases} 0 \text{ si } j\neq k \\ \prod_{i\neq j}(-j+i)\neq 0 \text{ si } j=k\end{cases}$ et donc :

$$\begin{aligned}\sum \lambda_k P_k &= 0 \Longrightarrow \forall j\in[[0,n]]\ ,\ \lambda_j\prod_{i\neq j}(i-j)=0\\ &\Longrightarrow \forall j\in[[0,n]]\ ,\ \lambda_j = 0\end{aligned}$$

la famille est donc libre et forme donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$

IV.A.2) le polynôme $n!$ se décompose donc dans cette base : $\exists\,(\alpha_k)_{k=0}^n$, $n! = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$. on divise la relation par $\prod_{i=0}^n (X+i)$ et on a bien :

$$\frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{X+k}$$

On substitue x à X pour avoir la relation demandée.

Pour calculer les α_k on prend la valeur en $-j$ de $n! = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_k$ ce qui donne $n! = \alpha_j\prod_{i\neq j}(i-j)$.

Or $\prod_{i\neq j}(i-j) = (0-j)(1-j)\cdots(-1).(1)\cdots(n-j) = (-1)^j(j)!(n-j)!$ d'où

$$\forall j\in[[0,n]]\ ,\ \ \alpha_j = (-1)^j\binom{n}{j}$$

et donc :

$$\boxed{\forall x>0\ ,\ \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{x+k}}$$

IV.B) la fonction $y->(1-y)^{x-1+k}$ est continue sur $[0,1[$ du type $\frac{1}{(1-y)^{1-x-k}}$ avec $1-x-k<1$. Elle est donc intégrable sur $[0,1[$et :

$$\int (1-y)^{x-1+k}dy = \frac{-(1-y)^{x+k}}{x+k}$$

et donc comme $x+k>0$:

$$\boxed{\forall x>0, \forall k\in\mathbb{N}\ ,\ \int_0^1 (1-y)^{x-1+k}dy = \frac{1}{x+k}}$$

IV.C) l'intégrale est bien convergente : $y->(1-y)^{x-1}y^n$ est continue positive sur $[0,1[$, équivalente en 1 à $\frac{1}{(1-y)^{1-x}}$ avec $1-x<1$

En utilisant les deux résultats précédents et le binôme de Newton on a :

$$\begin{aligned}\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{x+k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}dy\\ &= \int_0^1 (1-y)^{x-1}\left(\sum_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}(1-y)^k\right)dy\\ &= \int_0^1 (1-y)^{x-1}y^n dy\end{aligned}$$

La fonction $y->(1-y)^{x-1}y^n$ étant bien intégrable comme combinaison linéaire de fonctions intégrables.

Il suffit de remplacer $u_n(x)$ par son expression intégrale pour conclure :

$$\boxed{\forall x > 0, f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy}$$

IV.D.1) Comme $a \in \mathcal{A}$, la série $\sum a_n u_n(x)$ converge absolument pour tout $x > 0$. En particulier si $x = 1$, la série $\sum \frac{a_n}{n+1}$ converge. La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ converge pour $x = 1$. donc son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Sa dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n)a_n}{n+1} x^{n-1}$ a le même rayon de convergence . Donc $|x| < 1 \Rightarrow \sum \frac{na_n}{n+1} x^{n-1}$ converge absolument $\Longrightarrow$ $\sum \frac{na_n}{n+1} x^n$ converge absolument (on multiplie par x).

Et comme $\left| \frac{na_n}{n+1} x^n \right| \sim_{n->+\infty} |a_n x^n|$ la série $\sum a_n x^n$ converge au moins pour $|x| < 1$. Son rayon de convergence est donc au moins 1 .

IV.D.2) On a :

$$\forall x > 0 \ , \ \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) dy = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n dy$$

Si on peut intégrer termes à termes on a :

$$\forall x > 0 \ , \ \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$$

donc $x- > \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) dy$ est développable en série factoriel , et la fonction est égale à f_a d'après **IV.C)**

Reste à justifier l'intégration termes à termes de $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-y)^{x-1} y^n dy$ sur l'intervalle $[0, 1[$ (qui n'est pas un segment)

On se fixe un $x > 0$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $y- > a_n (1-y)^{x-1} y^n$ est continue intégrable sur $[0, 1[$ d'après **IV.C**
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1-y)^{x-1} y^n$ converge simplement et sa somme $(1-y)^{x-1} \phi_a(y)$ est continue sur $[0, 1[$ (une série entière est continue sur l'intervalle ouvert de convergence)
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left| a_n (1-y)^{x-1} y^n \right| dy = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| u_n(x)$. Cette série est bien convergente puisque $a \in \mathcal{A}$.

$$\boxed{\forall x > 0 \ , \ y- > (1-y)^{x-1} \phi_a(y) \text{ est intégrable sur } [0, 1[\text{ et } f_a(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) dy}$$

Partie V : Dérivée d'une série factorielle

V.A.1) On sait déjà que f_a est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (question **III.E)** . pour avoir l'expression proposée il faut dériver par rapport à x la fonction $\int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) dy$ en utilisant le théorème de Leibniz.

- $\forall y \in [0, 1[$, $x- > (1-y)^{x-1} \phi_a(y)$ est C^1 sur $]0, 1[$ de dérivée $x- > (1-y)^{x-1} \phi_a(y) \ln(1-y)$
- $\forall x > 0$, $y- > (1-y)^{x-1} \phi_a(y)$ est intégrable sur $[0, 1[$ (question **IV.D)**
- $\forall x > 0$, $y- > (1-y)^{x-1} \phi_a(y) \ln(1-y)$ est intégrable sur $[0, 1[$:même principe que **III.E**:

  pour $x' \in]0, x[$ $(1-y)^{x-1} \phi_a(y) \ln(1-y) = o_{y->1} \left[(1-y)^{x'-1} \phi_a(y) \right]$ puisque

  $$(1-y)^{x-1} \phi_a(y) \ln(1-y) = (1-y)^{x'-1} \phi_a(y). \left[(1-y)^{x-x'} \ln(1-y) \right]$$

  $y- > (1-y)^{x-1} \phi_a(y) \ln(1-y)$ est continue sur $[0, 1[$ négligeable devant une fonction intégrable , donc y est intégrable.
- Par monotonie, on a domination sur tout segment : si $x \in [\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$

  $$\left| (1-y)^{x-1} \phi_a(y) \ln(1-y) \right| \le (1-y)^{\alpha-1} |\phi_a(\alpha)| |\ln(1-y)|$$

  ce majorant étant intégrable puisque $\alpha > 0$ et donc $(1-y)^{\alpha-1} \phi_a(y) \ln(1-y)$ est intégrable sur $[0, 1[$ (étude du point précédent)

$$\boxed{\forall x > 0 \ , \ f_a'(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \phi_a(y) \ln(1-x) dy}$$

V.A.2) On sait que ϕ_a et $y -> \ln(1-y)$ sont développable en série entière sur $]-1,1[$. Donc par produit de Cauchy $y -> \phi_a(y)\ln(1-y)$ l'est aussi.

V.A.3) La fonction étant développable en série entière, on sait que sur $]-1,1[$

$$\psi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi_a^{(n)}(0)}{n!} y^n = \sum_{n=à}^{+\infty} b_n x^n$$

Le calcul des b_n revient donc au produit de Cauchy de $\phi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ par $\ln(1-y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n y^n$ avec $\alpha_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n=0 \\ \frac{-1}{n} \text{ si } n>0 \end{cases}$.

On a donc $b_0 = a_0\alpha_0 = 0$ et pou $n>0$, $b_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \alpha_{n-p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{-a_p}{n-p}$

$$\boxed{\forall y \in]-1,1[\text{ , } \phi_a(y)\ln(1-y) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n y^n \text{ avec } b_n = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{-a_p}{n-p}}$$

V.B) D'après l'expression précédente de b_n on a :

$$|b_n| \leq \sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{n-p}$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leq \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{(n-p)(n+1)^x} \right)$$

On veut permuter les 2 sommes : On fait la somme sur l'ensemble des couples (n,p) tels que $\begin{cases} 1 \leq n \leq N \\ \forall n \text{ , } 0 \leq p \leq n-1 \end{cases}$ soit $0 \leq p \leq n-1 \leq N-1$ ou encore $\begin{cases} 0 \leq p \leq N-1 \\ \forall p, p+1 \leq n \leq N \end{cases}$ et donc :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leq \sum_{p=0}^{N-1} |a_p| \sum_{n=p+1}^{N} \frac{1}{(n-p)(n+1)^x} = \sum_{p=0}^{N-1} |a_p| \sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{(k)(k+p+1)^x}$$

en posant $k = n-p$.

V.C) Encore une comparaison série-intégrale : La fonction $t -> t(t+p+1)^x$ est le produit de deux fonctions croissantes $(x>0)$ positive donc est croissante positive et donc $t -> \frac{1}{t(t+p+1)^x}$ est décroissante. Pour $k \geq 2$ on a donc

$$\frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t(t+p+1)^x}$$

et donc

$$\sum_{k=2}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \int_{1}^{N-p} \frac{dt}{t(t+p+1)^x}$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^x}$ converge car $\frac{1}{t(t+p+1)^x} \sim_{t=+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}$ fonction positive avec $x+1>1$. La fonction à intégrer étant positive , sa primitive est croissante. et donc la limite en $+\infty$ est la borne supérieure:

$$\sum_{k=2}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^x}$$

On ajoute alors le premier terme:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{1}{(p+1)^x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^x}}$$

V.D) Il suffit de majorer :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^x} \leq \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \frac{1}{x}\frac{1}{(p+1)^x}$$

Pour avoir les 2 morceaux, on sépare en deux l'intégrale:

$$\int_1^{p+1} \frac{dt}{t(t+p+1)^x} \leq \int_1^{p+1} \frac{dt}{t(p+1)^x} = \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x}$$

et

$$\int_{p+1}^{+\infty} \frac{dt}{t(t+p+1)^x} \leq \int_{p+1}^{+\infty} .\frac{dt}{t(t)^x} = \int_{p+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{1}{x}.\frac{1}{(p+1)^x}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1+\frac{1}{x}\right) \frac{1}{(p+1)^x}}$$

V.E) La suite des sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x}$ est croissante majorée par la suite des sommes partielles :

$$\sum_{p=0}^{n-1} |a_p| . \left(\frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1+\frac{1}{x}\right) \frac{1}{(p+1)^x} \right)$$

Il suffit donc de prouver que la série $\sum |a_p| . \left(\frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1+\frac{1}{x}\right) \frac{1}{(p+1)^x} \right)$ converge

Comme la suite $a \in \mathcal{A}$ on sait par l'équivalent du **III.A)** que la série $\sum |a_n| \frac{1}{(n+1)^x}$ converge pour tout $x > 0$.

Ce qui assure déjà la convergence de la série $\sum_p |a_p| \frac{1}{(p+1)^x}$ donc de $\sum_p \left(1+\frac{1}{x}\right) |a_p| \frac{1}{(p+1)^x}$

Pour la convergence absolue de $\sum |a_p| . \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x}$ on introduit (encore une fois) $x' \in]0, x[$ et on vérifie que

$$|a_p| . \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} = o_{p->+\infty} \left(\frac{|a_p|}{(1+p)^{x'}} \right)$$

.

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{b_n}{(n+1)^x} \text{ converge absolument sur }]0, +\infty[}$$

V.F) Ce qui assure avec **III.A)** la convergence absolue de la série $\sum b_n u_n(x)$ sur $]0, +\infty[$

On applique maintenant **IV.D)**) à ψ_a :

$\psi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n y^n$ est une série entière de rayon de convergence ≥ 1 donc $x-> \int_0^1 (1-y)^{x-1} \psi_a(y) dy$ est développable en série factorielle et $\int_0^1 (1-y)^{x-1} \psi_a(y) dy = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n(x)$.

Or (**V.A**) $f_a'(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \psi_a(y) dy$ et donc :

$$\boxed{\forall x > 0 \ , \ f_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u_n(x)}$$

V.G)

$$x > 0, \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} 0.u_n(x)$$

donc $x-> 1/x$ est développable en série factoriel avec $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1 \ , \ a_n = 0$

On dérive une fois : $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ est développable en série factorielle :

$$\forall x > 0, \frac{-1}{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n' u_n(x)$$

avec $a_0' = 0$ et $\forall n \geq 1 \ , \ a_n' = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p} = -\frac{1}{n}$

$$\boxed{\forall x > 0, \frac{-1}{x^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(x)}{n}}$$

On dérive une nouvelle fois : $f"(x) = \frac{2}{x^3}$ est développable en série de factorielle:

$$\forall x > 0, \frac{2}{x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} a"_n u_n(x)$$

avec $a"_0 = 0$, $a"_1 = a_0' = 0$, $\forall n \geq 2$, $a"_n = -\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p'}{n-p} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(n-p)}$. En particulier : $a"_2 = a"_3 = 1, a"_4 = \frac{11}{12}$

Ce qui donne la somme partielle

$$S_4 = \sum_{n=0}^{4} a"_n u_n(x) = 1.\frac{2}{x(x+1)(x+2)} + 1.\frac{6}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{11}{12} \frac{24}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

en divisant par 2 (on décompose $2/x^3$) on retrouve bien les coefficients , 1,3,11 de la partie 2