Semaines 11 et 12

Contenu:

- produit mixte et produit vectoriel en dimension 3
- Endomorphismes auto-adjoints positifs, définis positifs. Notations $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Dénombrements classiques: p-listes, p-listes sans répétitions, permutations, p-combinaisons (rappels de sup).
- Révisions sur les variables aléatoires sur un espace probabilisé fini**.**
- Ensembles dénombrables, familles sommables **(pas de questions délicates sur ces questions)**
- Probabilité sur un ensemble quelconque. **(pas de questions délicates sur les tribus**).
- Variables aléatoires discrètes: couples de VA, indépendance, espérance, variance covariance.
  (loi des grands nombres et fonction génératrices hors de ce programme de colle)

Questions de cours: questions avec $(*)$ uniquement pour les meilleurs.

1. Endomorphisme auto-adjoint positif, défini positif: définiton et caractérisation.
2. Matrice symétrique réelle positive, définie positive: définiton et caractérisation.
3. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives ou nulles. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres positives ou nulles vérifiant $R^2 = S$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A^T \times A$ est diagonalisable et $sp\left(A^T \times A\right) \subset \mathbb{R}+$.
5. Soit $S_1 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de $S_1 + S_2$ sont positives.
6. Dénombrements classiques: p-listes, p-listes sans répétitions, permutations, $(*)$ p-combinaisons, ensemble des parties. **(pour les colleurs: l'étudiant doit savoir dégager les idées de la démonstration mais on ne demande pas de formalisation complète de la démonstration)**.
7. Continuité croissante et continuité décroissante: énoncé seul. On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce de monaie équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir face à tous les lancers?
8. Formule des probabilités composées. Dans un jeu de 32 cartes quelle est la probabilité de tirer un roi, puis une dame, puis un roi?
9. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue une série de tirages de la façon suivante: Si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on la remplace par une blanche. Soit A_n l'événement: on tire une boule blanche pour la première fois au $n^{ième}$ tirage. Exprimer A_n en fonction des N_j. En déduire $P(A_n)$.
10. Formule des probabilités totales. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un nombre $i \in [[1, n]]$. On dispose ensuite d'une urne contenant i boules numérotées de 1 à i. Soit $k \in [[1, n]]$. Quelle est la probabilité de tirer une boule numérotée k?
11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire au hasard un nombre $i \in [[1, n]]$. On dispose ensuite d'une urne contenant i boules numérotées de 1 à i. Soit $k \in [[1, n]]$. Quelle est la probabilité de tirer une boule numérotée k?
12. Formule de Bayes (version avec un système complet d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
13. On sait que dans la population 5 hommes sur 100 sont daltoniens, contre 25 femmes sur 10 000. Un daltonien est choisi au hasard dans la population ; quelle est la probabilité que ce soit un homme ? (on admettra qu'il y a autant d'hommes que de femmes dans la population).
14. Définition de l'indépendance (mutuelle) de n événements.
15. Dans un certain pays, chaque jour, soit il fait beau, soit il pleut, soit il neige. il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps. On suppose que le temps au jour n est beau avec la probabilité p_n, qu'il pleut avec la probabilité q_n et qu'il neige avec la probabilité r_n.
    En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1} et fonction de p_n, q_n et r_n. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$.

16. Si $X_1, \ldots, X_p$ sont indépendantes et suivent une loi uniforme de $[[1,n]]$, donner la loi $Z = \min(X_1, \ldots, X_p)$.

17. Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = [[0,N]]$. Montrer que $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(X \geq k)$.

18. Loi conjointe et lois marginales d'un couple de VA discrètes: définition; pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P(X = x_i) = \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

19. Premier succès dans un schéma de Bernoulli, définition de la loi géométrique.

20. Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ (exo)

21. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors X est d'espérance finie $E(X) = \dfrac{1}{p}$.

22. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X est d'espérance finie $E(X) = \lambda$.

23. Loi du deuxième succès dans un schéma de Bernoulli.

24. Lemme des coalitions: énoncé seul. Loi du $k^{ième}$ succès dans un schéma de Bernoulli.

25. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie $P(X = i, Y = j) = \dfrac{a}{i! \times j!}$. Déterminer la valeur de a et reconnaître les lois marginales de X et Y. Les variables X et Y sont elles indépendantes?

26. Révision: Développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$

    - par dérivation terme à terme de la série géométrique
    - par application du DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

27. Si X et Y des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre p. Déterminer $P(X > n)$. En déduire la loi de $\min(X,Y)$.

28. Citer les propriétés de l'espérance (critère de comparaison, positivité, condition de nullité si $X \geq 0$, linéarité, croissance)

29. Espérance de XY lorsque X et Y sont indépendantes, formule du transfert: énoncés seuls.

30. Si X est variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$: Démonstration dans le cas $X(\Omega) = [[0,N]]$.

31. $(*)$ démonstration de la question précédente dans le cas quelconque.

32. Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie, $(X - E(X))^2$ est d'espérance finie et $E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$

33. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si X^2 est d'espérance finie alors $(aX+b)^2$ aussi et $V(aX+b) = a^2 V(X)$

34. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors X admet une variance $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

35. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X admet une variance $V(X) = \lambda$.

36. Si $X \geq 0$ est d'espérance finie alors pour tout $\alpha > 0$ $P(X \geq \alpha) \leq \dfrac{E(X)}{\alpha}$.

37. Si X^2 est d'espérance finie alors pour tout $\varepsilon > 0$ $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

38. définition de la covariance, bilinéarité de la covariance.

39. En utilisant la bilinéarité généralisée, exprimer $V(X_1 + \cdots + X_n)$ à l'aide des variances des X_i et de covariances de (X_i, X_j).

40. covariance de deux VA indépendantes dont les carrés sont d'espérance finie. Application à $V(X_1 + \cdots + X_n)$ lorsque les VA sont indépendantes deux à deux.

41. Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie, $(X - E(X))^2$ est d'espérance finie et $E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$

42. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si X^2 est d'espérance finie alors $(aX+b)^2$ aussi et $V(aX+b) = a^2 V(X)$

43. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors X admet une variance $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

44. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors X admet une variance $V(X) = \lambda$.

45. Si $X \geq 0$ est d'espérance finie alors pour tout $\alpha > 0$ $P(X \geq \alpha) \leq \dfrac{E(X)}{\alpha}$.

46. Si X^2 est d'espérance finie alors pour tout $\varepsilon > 0$ $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

47. définition de la covariance, bilinéarité de la covariance.

48. En utilisant la bilinéarité généralisée, exprimer $V(X_1 + \cdots + X_n)$ à l'aide des variances des X_i et de covariances de (X_i, X_j).

49. covariance de deux VA indépendantes dont les carrés sont d'espérance finie. Application à $V(X_1 + \cdots + X_n)$ lorsque les VA sont indépendantes deux à deux.