DM 11 pour le 19 décembre 2025

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Soit (u,v) une famille libre de E et $F = vect\,(u,v)$.
On considère l'endomorphisme f de E défini par $f\,(x) = (x|u)\,u - (x|v)\,v$ (on admettra que f est un endomorphisme)

Q 1 *Montrer que f est autoadjoint.*

Q 2 *Déterminer* $\ker(f)$.

Q 3 *Justifier que F est stable par f. Soit g l'endomorphisme induit par f sur F. Donner la matrice de g dans la base (u,v).*

Q 4 *Déterminer le spectre de f.*

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère une base $b = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et on pose, pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $s_{i,j} = (e_i \mid e_j)$ et $S = (s_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$.

Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$ et X et Y les vecteurs colonne coordonnés de x et y dans la base

Q 5 *Montrer que $(x|y) = X^T S Y$.*

On suppose que $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_0^1 P\,(t)\,Q\,(t)\,dt$.

Q 6 *Préciser la matrice S dans le cas où b est la base canonique de E.*

Q 7 *Soit $H = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.*
Montrer que H est diagonalisable et déduire de la première question que $sp\,(H) \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

Définition 1 *Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle fonction indicatrice de A la fonction de*

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{c} E \rightarrow \{0,1\} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

L'objectif de l'exercice est de voir comment l'utilisation de fonction indicatrice d'événements permet de faire un comptage de "succès".

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. On lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules. On s'intéresse au nombre de case occupées à la fin de l'expérience.
Pour $i \in [[1,n]]$, on noteT_i le nombre de cases occupées après i lancers.

Q 8 *Donner la loi de T_1. Déterminer l'espérance de T_1 (notée $\mathbb{E}(T_1)$).*

Q 9 *Déterminer la loi de T_2 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$.*

Dans la suite, n est un entier naturel, $n \geq 2$..

Q 10 *Déterminer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.*

Soit $(k, l) \in [[1, N]]^2$ et $k \neq l$.
On considère l'évenement $A_{k,l}$: "les n lancers sont arrivés dans la case k ou dans la case l ".
Pour $i \in [[1, n]]$, on considère la variable aléatoire X_i, numéro de la case obtenue au $i^{ème}$ lancer.
On peut donc écrire $A_{k,l} = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in \{k, l\})$.
On considère l'événement B_k: "l'ensemble des n boules lancées sont arrivés dans la case k"
On considère l'évenement $C_{k,l}$: "l'ensemble des n boules lancées occupent exactement deux cases, la case k et la case l".

Q 11 *Déterminer $\mathbb{P}(A_{k,l})$.*

Q 12 *Donner une relation ensembliste entre les événements $A_{k,l}, B_k, B_l$ et $C_{k,l}$. En déduire $\mathbb{P}(C_{k,l})$.*

Q 13 *Montrer que $\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{N}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}$.*

Pour $1 \leq k \leq N$, on Z_k la variable indicatrice de l'événement "la boite k contient au moins une boule"

Q 14 *Déterminer la loi de Z_k.*

Q 15 *Les variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_k$ sont-elles indépendantes?*

Q 16 *Exprimer T_n en fonction des variables aléatoires $(Z_k)_{1 \leq k \leq N}$ et en déduire la valeur de l'espérance de T_n.*

Exercice 4 facultatif

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini admettant n éléments. On s'intéresse qu nombre a_n d'applications f de E dans E vérifiant $f \circ f = id_E$.
Donner une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 1

R 1 *Soit* $(x,y)\in E^2$. *On* $(f(x)|y)=(((x|u)\,u-(x|v)\,v)\,|y)=(x|u)\,(u|y)-(x|v)\,(v|y)$ *et de même* $(x|f(y))=(f(y)\,|x)=(y|u)\,(u|x)-(y|v)\,(v|x)=(f(x)\,|y)$ *par symétrie du produit scalaire.*

R 2 *On a* $f(x)=0_E\Leftrightarrow(x|u)\,u-(x|v)\,v|y\Leftrightarrow(x|u)=(x|v)=0$ *car* (u,v) *est libre.*
On en déduit que $x\in\ker(f)\Leftrightarrow x\in\{u,v\}^{\perp}=(vect\,(u,v))^{\perp}=F^{\perp}$.

R 3 *Pour tout* $x\in E$, $f(x)\in vect\,(u,v)=F$ *donc si* $x\in F$ *alors* $f(x)\in F$ *donc* F *est stable par* f.
On a $g(u)=f(u)=\|u\|^2u-(u|v)\,v$ *et le calcul pour* $g(v)$ *donne* $M=mat_{(u,v)}(g)=\begin{pmatrix}\|u\|^2 & (u|v)\\ -(u|v) & -\|v\|^2\end{pmatrix}$

R 4 *La juxtaposition de* (u,v) *base de* F *et de* b_0 *une base de* $F^{\perp}$ *forme une base* b *de* E *(car* $E=F\oplus F^{\perp}$*) et* $A=mat_b(f)=\left(\begin{array}{c|c}M & 0\\ \hline 0 & 0_{n-2,n-2}\end{array}\right)$ *donc* $\chi_f(x)=\chi_A(x)=\chi_M(x)\times x^{n-2}$ *(déterminant triangulaire par bloc) donc* $sp\,(f)=sp\,(g)\cup\{0\}$.
On a $\chi_M(x)=x^2-\left(\|u\|^2-\|v\|^2\right)x+\left((u|v)^2-\|u\|^2\|v\|^2\right)$.
On a $\Delta=\left(\|u\|^2-\|v\|^2\right)^2-4\left((u|v)^2-\|u\|^2\|v\|^2\right)=\|u\|^4+\|v\|^4-4\,(u|v)^2+2\,\|u\|^2\|v\|^2=\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)^2-4\,(u|v)^2=\left(\|u\|^2+\|v\|^2+2\,(u|v)\right)\times\left(\|u\|^2+\|v\|^2+2\,(u|v)\right)=\|u+v\|^2\times\|u-v\|^2>0$ *car* (u,v)*.libre donc* $u+v$ *et* $u-v$ *non nuls.*
Le polynôme χ_M *admet deux racines distinctes* $\lambda_1=\dfrac{\left(\|u\|^2-\|v\|^2\right)+\|u+v\|\times\|u-v\|}{2}$
et $\lambda_2=\dfrac{\left(\|u\|^2-\|v\|^2\right)-\|u+v\|\times\|u-v\|}{2}$.
On a $\lambda_i\neq0$ *car* $\ker(g)=F\cap\ker(f)=F\cap F^{\perp}=\{0\}$. *On a donc exactement trois valeurs propres distinctes* $\lambda_1,\lambda_2,0$ *de* f.

Exercice 2

R 5 *D'une part,* $(x|y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i|\sum\limits_{i=1}^{n}y_ie_i\right)=\sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]^2}x_iy_j\,(e_i|e_j)=\sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]^2}x_iy_js_{i,j}$.

D'autre part, $SY=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}s_{1,j}y_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n}s_{2,j}y_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}s_{n,j}y_j\end{pmatrix}$ *donc* $X^TSY=x_1\sum\limits_{j=1}^{n}s_{1,j}y_j+x_2\sum\limits_{j=1}^{n}s_{2,j}y_j+\cdots x_n\sum\limits_{j=1}^{n}s_{n,j}y_j=\sum\limits_{(i,j)\in[[1,n]]^2}x_iy_js_{i,j}$.

R 6 *On a donc* $s_{i,j}=\int_0^1t^{i-1}\times t^{j-1}dt=\int_0^1t^{i+j-2}dt=\dfrac{1}{i+j-1}$ *donc* $S=H$ *de la question suivante.*

R 7 *La matrice* H *est symétrique réelle donc diagonalisable.*
Si $X=\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*.et* $P=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_iX^i$, *alors, d'après la première question,* $(P|P)=X^THX$.
Si $X\neq0$*.alors* $P\neq0$ *donc* $(P|P)>0$ *donc* $X^THX>0$ *donc* H *est symétrique définie positive donc* $sp\,(H)\in\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

R 8 *On a* $T_1 = 1$*: le nombre de cases occupées après un lancer est* 1*. On en déduit que* $E(T_1) = \mathbb{P}(T_1 = 1) \times 1 = 1$*.*

R 9 *On suppose* $n = 2$

a Par indépendance, $\mathbb{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \mathbb{P}(X_1 = k) \times \mathbb{P}(X_2 = k) = \dfrac{1}{N^2}$*.*

On a $(X_1 = X_2) = \bigcup_{k=1}^{N} [(X_1 = k) \cap (X_2 = k)]$*, union disjointe donc*

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \frac{N}{N^2} = \frac{1}{N}.$$

b On a $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$ *car une ou deux cases sont occupées après deux lancers.*
$(T_2 = 1)$ *est l'événement "une case est occupée par les deux lancers" donc c'est l'événement* $(X_1 = X_2)$*.*
On a donc $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \dfrac{1}{N}$*. On en déduit* $\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{N}$*. On a donc*
$E(T_2) = 1 \times \dfrac{1}{N} + 2\left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = 2 - \dfrac{1}{N}$*.*

R 10 *Si* $k \in [[1, N]]$*, l'événement* $\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = k)$ *est l'événement 'tous les* X_i*, pour* $i \in [[1, n]]$*, valent* k*'.*

L'événement $(T_n = 1)$ *est "tous les* X_i*,pour* $i \in [[1, n]]$*, prennent la même valeur" donc* $(T_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$*.*

On a donc $\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(B_k)$ *(union disjointe) et, par indépendance*

$$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = k)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) = \left(\frac{1}{N}\right)^n.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(T_n = 1) = N\left(\dfrac{1}{N}\right)^n = \dfrac{1}{N^{n-1}}$*.*

R 11 *On a* $A_{k,l} = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in \{k, l\})$ *et* $\mathbb{P}(X_i \in \{k, l\}) = \dfrac{2}{N}$ *donc par indépendance,* $\mathbb{P}(A_{k,l}) = \left(\dfrac{2}{N}\right)^n$*.*

R 12 *L'événement* $C_{k,l}$ *est: "l'ensemble des valeurs de* $X_1, \dots X_n$ *est exactement* $\{k, l\}$*"*
L'événement $A_{k,l}$ *est: "l'ensemble des valeurs de* $X_1, \dots X_n$ *est contenu dans* $\{k, l\}$*"*
L'événement B_k *est: "l'ensemble des valeurs de* $X_1, \dots X_n$ *est exactement* $\{k\}$*"*
donc $C_{k,l} = A_{k,l} \setminus (B_k \cup B_l)$*.*
Or $B_k \cup B_l$ *est une union disjointe et* $B_k \cup B_l \subset A_{k,l}$ *donc*
$\mathbb{P}(C_{k,l}) = \mathbb{P}(A_{k,l}) - (\mathbb{P}(B_k) + \mathbb{P}(B_l))$*.On en déduit que* $\mathbb{P}(C_{k,l}) = \left(\dfrac{2}{N}\right)^n - 2 \times \left(\dfrac{1}{N}\right)^n = \dfrac{2^n - 2}{N^n}$*.*

R 13 *Or* $(T_n = 2) \Leftrightarrow$ *"il existe une partie* $\{k, l\}$ *de* $[[1, N]]$ *telle que les variables aléatoires* X_i*,pour* $i \in [[1, n]]$ *prennent exactement les valeurs* k *et* l*".*
On a donc $(T_n = 2) = \bigcup_{\{k,l\} \text{ partie à 2 éléments de } [[1,N]]} C_{k,l}$ *qui est une union disjointe. On a donc* $\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{N}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}$*.*

R 14 $(Z_k = 0)$ *est l'événement "tous les* X_i *ont une valeur dans* $[[1, n]] \setminus \{k\}$*".*
On a donc $\mathbb{P}(Z_k = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in [[1, n]] \setminus \{k\}\right) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$ *par indépendance.*
On a donc $\mathbb{P}(Z_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z_k = 0)$ *et* Z_k *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $p = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$*.*

R 15 *L'événement* $(Z_1 = 0) \cap \ldots \cap (Z_N = 0)$ *est impossible, car si* $k = X_1$ *alors* $Z_k = 1$ *(toutes les cases ne peuvent être vides à l'issue des n lancers), donc*

$$\mathbb{P}\left((Z_1 = 0) \cap \cdots \cap (Z_N = 0)\right) = 0 \neq (1-p)^n = \mathbb{P}(Z_1 = 0) \times \cdots \times \mathbb{P}(Z_N = 0)$$

Les variables aléatoires $(Z_k)_{1 \leq k \leq N}$ *ne sont donc pas indépendantes.*

R 16 $Z_k = 1$ *si* $k \in \{X_1, \ldots, X_n\}$ *et* $Z_k = 0$ *sinon donc* T_n *(nombre de valeurs distinctes de* $X_1, \ldots, X_n$*) vérifie* $T_n = Z_1 + \cdots + Z_n$*.*
Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(Z_k) = \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$

Exercice 4

On a $f \circ f = f \Leftrightarrow \forall x \in E, (f(f(x))) = f(x)$, ce qui revient à $\forall y \in f(E), f(y) = y$.
Posons $Inv(f) = \{x \in E, f(x) = x\}$. On a toujours $Inv(f) \subset f(E)$ et donc $f \circ f = f \Leftrightarrow Inv(f) = f(E)$.
Soit k, $1 \leq k \leq n$.

- Soit $E_k \subset E$ de cardinal k.
  Supposons $Inv(f) = E_k$ de cardinal k, $1 \leq k \leq n$.
  Déterminons le nombre d'applications f vérifiant $f \circ f = f$ et $Inv(f) = E_k$.
  Les images des éléments de E_k sont connues: $f(x) = x$ si $x \in E_k = Inv(f)$.
  Un éléments $x \notin E_k$ a une image quelconque dans $f(E) = E_k$. Il y a donc k choix possibles pour $f(x)$.
  Il y a $n - k$ éléments dans $E \backslash E_k$ et les choix d'un $f(x)$ n'influe pas les choix des autres.
  Il y a donc k^{n-k} choix d'applications f.

- Il y a $\binom{n}{k}$ choix de E_k donc $\binom{n}{k}k^{n-k}$ applications f vérifiant $f \circ f = f$ et $Inv(f)$ est de cardinal k.

Le cardinal de $Inv(f)$ peut être pris quelconque dans $[[1, n]]$ donc le nombre a_n d'applications f vérifiant $f \circ f = f$ est donc $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}k^{n-k}$.

Exercice

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\varphi(x,y) = 2x^2 + 12xy - 7y^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Q 17 *Donner une matrice S symétrique réelle de taille 2 pour laquelle $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = X^T \times S \times X$.*

Q 18 *Déterminer $sp(S)$. Déterminer $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP$ est diagonale.*

Q 19 *Soit $P \in O_2(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}SP$.*

a *Justifier que $\varphi(x,y) = Y^T \times D \times Y$.*

b *Justifier que $x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$*

c *Soit $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathcal{E}$, $-10 \leq \varphi(x,y) \leq 5$.*
Montrer qu'il existe $(x_0,y_0) \in \mathcal{E}$ et $(x_1,y_1) \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi(x_0,y_0) = -10$ et $\varphi(x_1,y_1) = 5$.

Exercice

R 17 *On vérifie que si $S = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ alors $X^T \times S \times X = 2x^2 + 12xy - 7y^2$.*

R 18 *On obtient que $sp(S) = \{5, -10\}$ et $E_5(S) = vect\left(\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right)\right)$ et $E_5(S) = vect\left(\left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array}\right)\right)$.*
Posons $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in O(2)$ (les colonnes sont orthonormées et de norme 1°
La formule de changement de base donne $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = D = P^{-1}SP$.

R 19 *Etude de $\varphi(x,y)$.*

a *On a $Y^T \times D \times Y = (P^{-1}X)^T D (P^{-1}X) \underset{P^{-1}=P^T}{=} X^T P \times P^{-1}SP \times P^{-1}X = X^T \times S \times X$.*

b *On a $x^2 + y^2 = X^T X = (PY)^T \times (PY) = Y^T P^T P Y = Y^T Y = (x')^2 + (y')^2$ car $P \in O(2)$.*

c *On a donc $\varphi(x,y) = Y^T \times D \times Y = (x', y') \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5x'^2 - 10y'^2$.*
Si $(x,y) \in \mathcal{E}$, on a $-10x'^2 - 10y'^2 \leq 5x'^2 - 10y'^2 \leq 5x'^2 + 5y'^2 = 5$
car $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 = 1$.
Si $(x', y') = (1, 0)$, ce qui revient à $(x,y) =$ alors $\varphi(x,y) = 5$
Si $(x', y') = (0, 1)$ alors $\varphi(x,y) = -10$.