PSI DS 4 (le mercredi 10 décembre 2025)

durée 4 h - **calculatrices interdites**

- Les solutions devront être rédigés avec **une encre foncée et** présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter ultérieurement).
- *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction.*
- *Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

  Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément **le numéro de la question utilisée.**

DEBUT DS4 standard

Exercice 1

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est supposé muni de son produit scalaire usuel et orienté

Soit $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A

Q 1 *Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E.*
Montrer que si u est une isométrie et est un endomorphisme autoadjoint alors u est une symétrie orthogonale.

Q 2 *Montrer que A est une matrice de rotation.*

Q 3 *Déterminer l'axe Δ de la rotation vectorielle f.*

Q 4 *Déduire des questions précédentes la nature de la rotation vectorielle f.*

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ et on pose pour $(P, Q) \in E^2$, $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)\, Q(x)\, dx$.

On admet que cette égalité définit un produit scalaire de E.

Pour $P \in E$, on pose $u(P) = (X^2 - 1)\, P'' + 2XP'$.

Q 5 *Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, P'(x)\, Q'(x)\, dx = (u(P)\,|Q)$.*

Q 6 *En déduire que $(u(P)\,|Q) = (P|u(Q))$.*

Q 7 *Soit $P \in E, P \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $u(P) = \lambda P$. Montrer que $\lambda \geq 0$.*

$\boxed{\textbf{DEBUT DS4 bis}}$

Problème:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est normale si et seulement si $A \times A^T = A^T \times A$.
Pour $\theta \in R$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les cas suivants, indiquer si A est normale*

a *A est symétrique.*

b *A est antisymétrique.*

c *A est une matrice orthogonale.*

Q 9 *Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$.*
Montrer que si A est une matrice normale alors $P^{-1}AP$ est une matrice normale.

Q 10 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que A est une matrice normale.*

a *Montrer que $P(A) \times A^T = A^T \times P(A)$.*

b *En déduire que $P(A)$ est une matrice normale.*

Q 11 *Etude de R_θ.*

a *Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice R_θ.*

b *Pour quelles valeurs de θ la matrice R_θ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?*

c *Justifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, R_θ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et donner une matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonale et semblable à R_θ.*

Q 12 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.*
Montrer que A est la matrice nulle.

Q 13 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 - A + I_n = 0$.*

a *Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

b *Justifer que n est pair et que la trace de A est un entier positif.*

Q 14 *Soit u et v deux endomorphismes de E. On suppose $u \circ v = v \circ u$.*

a *Montrer que $\ker(u)$ est stable par v.*

b *Montrer que $\operatorname{Im}(u)$ est stable par v.*

Matrices normales de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 15 *Montrer que A est normale si et seulement si A est symétrique ou $(a = d$ et $c = -b)$.*

Q 16 *Montrer que A est normale si et seulement si A est symétrique ou $\exists \rho > 0$ et $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = \rho \times R_\theta$.*

Q 17 *Déterminer les matrices normales $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 - A + I_2 = 0$.*

Adjoint d'un endomorphisme

Dans la suite du problème, E est un espace eucliden de dimension $n \geq 1$ dont le produit scalaire est noté $\langle\ .\ |\ .\ \rangle$. On considère un endomorphisme f de E.

Q 18 *Soit B_0 est une base orthonormée de E. Soit A la matrice f dans la base B_0.*
Soit f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base B_0 est A^T.
Soit B une base orthonormée quelconque de E et M la matrice de f dans la base B.
Montrer que $(M)^T$ est la matrice de f^* dans la base B.

On en définit l'**adjoint** de f comme l'endomorphisme f^* de E tel que, une base orthonormée, la matrice de f^* est la transposée de la matrice de f (et cela ne dépend pas de la base orthonormée choisie d'après la question précédente).

Q 19 *Montrer que $sp(f) = sp(f^*)$.*

Q 20 *Montrer que: $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle$.*

Q 21 *Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$.*
Montrer que $g = f^*$.

Q 22 *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f et f^*.*
Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f et f^*.

Endomorphisme normal

On dit que l'endomorphisme f est normal si et seulement si $f^* \circ f = f \circ f^*$.

Q 23 *Montrer que f est un endomorphisme normal si et seulement si la matrice de f dans toute base orthonormée est une matrice normale.*

Q 24 *Montrer que si f est un endomorphisme normal alors $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.*

Q 25 *Réciproquement, on suppose que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.*
Soit $B_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $A = mat_{B_0}(f)$. Soit $B = A^T \times A$.

a *Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f^*(x), f^*(y)\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$.*

b *Exprimer $\langle f(e_i)|f(e_j)\rangle$ à l'aide de la matrice B.*

c *En déduire que f est un endomorphisme normal.*

Matrices normales et polynômes annulateurs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice normale

Q 26 *On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$. On pose $S = A^T \times A$.*

a *Justifier que $S^p = 0$.*

b *En déduire que $S = 0$.*

c *En déduire que $A = 0$.*

Q 27 *On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^q(A) = 0$, montrer que $P(A) = 0$.*

Q 28 *Application: Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 + M - M^T = I_n$.*

a *Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 4.*

b *En déduire que $(M - I_n)^3 (M + I_n)^3 = 0$.*

c *En déduire que $M^2 = I_n$ puis, que M est une matrice symétrique.*

Q 29 *On suppose que A n'est pas la matrice nulle.*

a *Montrer que A admet un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}\{X\}$ (on pourra utiliser la question 27).*

b *Que peut-on en déduire?*

Réduction des endomorphismes normaux.

Q 30 *On suppose dans cette question qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs de la forme $(\mathcal{R})$:* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}$ *où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des réels, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ sont des réels strictement positifs et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ des réels.*
(Les bloc diagonaux sont donc de taille 1 ou de taille 2 de la forme ρR_θ).
Montrer que f est un endomoprhisme normal.

Le but de la partie est de montrer une réciproque du résultat de la question précédente:
On suppose dans la suite que f est un endomorphisme normal de E et on cherche à montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $(\mathcal{R})$ donnée dans la question précédente.

Q 31 *Montrer que* $\ker(f) = \ker(f^*)$.

Q 32 *Montrer que, pour $\lambda \in sp(f)$, $\ker(f - \lambda id_E) = \ker(f^* - \lambda id_E)$.*

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, on note f_F l'endomorphisme induit par f sur F défini par: $f_F : \left\{ \begin{array}{c} F \to F \\ x \mapsto f_F(x) = f(x) \end{array} \right.$.

Q 33 *Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f et f^* alors f_F est un endomorphisme normal de F et que $(f_F)^* = (f^*)_F$.*

Q 34 *Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $F = \ker(Q(f))$.*
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f et f^*.

$\boxed{\textbf{FIN DS4 standard}}$

Q 35 *Dans cette question, on suppose que f n'admet pas de valeurs propres ($sp(f) = \emptyset$).*

a *Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} f^2 + af + bid_E \text{ n'est pas bijective} \\ a^2 - 4b < 0 \end{cases}$.*

On pose $F = \ker(f^2 + af + bid_E)$ qui est stable par f et f^* d'après la question 14.
On pose $g = f_F + f_F^*$.

b *Montrer que $sp(g) \neq \emptyset$.*

c *Soit e un vecteur propre de g.*
Montrer que $vect(e, f(e))$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 stable par f.

d *Montrer que $vect(e, f(e))$ est stable par f^*.*

Q 36 *Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par f et f^*.*

Q 37 *Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs de la forme :* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}$ *où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des réels, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ sont des réels strictement positifs et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ des réels.*

Etude d'un exemple.

Dans cette partie, A est une matrice normale et inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A + I_n)^7 = A^7 + I_n$.
On note $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

Q 38 *Dét'erminer les racines complexes multiples de P.*

Q 39 *En déduire la décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.*

Q 40 *Montrer que A est une matrice orthogonale.*

Q 41 *Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^T = P(A)$.*

$\boxed{\textbf{FIN DS4 bis}}$

Exercice 3: A ne traiter que si toutes les questions du DS ont été traitées.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini admettant n éléments. On s'intéresse qu nombre a_n d'applications f de E dans E vérifiant $f \circ f = id_E$.
Donner une expression de a_n en fonction de n.

Correction DS 4 PSI

Exercice 1

R 1 *Soit b une base orthonormée de E. Posons $M = mat_b(u)$ L'endomorphisme u est une isométrie donc $M \in O(n)$ donc $M^T M = I_n$ et est un endomorphisme autoadjoint donc M est symétrique donc $M^T = M$. On en déduit que $M^2 = I_n$ donc u est une symétrie par rapport à $F = E_1(u)$ parallèlement à $G = E_{-1}(u)$ avec $F \oplus G = E$.*
Or u est un endomorphisme autoadjoint donc $E_1(u) \perp E_{-1}(u)$ donc $E_{-1}(u) \subset (E_1(u))^\perp$ et $\dim(E_{-1}(u)) = \dim\left((E_1(u))^\perp\right)$ (car $E_1(u) \oplus (E_1(u))^\perp = E$ (dimension finie).
u est donc une symétrie orthogonale.

R 2 *On vérifie que (C_1, C_2, C_3) est une BON de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc $A \in O_3(\mathbb{R})$ et $det(A) = +1$ donc A est une matrice de rotation.*

R 3 *La résolution de $AX = A$ donc $X = x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\Delta = vect(u)$ avec $u = (3, -2, 1)$.*

R 4 *La matrice de A est symétrique donc f est aussi autoadjoint donc f est une symétrie orthogonale.*
Or $\Delta = E_1(u)$ est de dimension 1 donc f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ c'est-à-dire la rotation d'axe Δ et d'angle π (les deux orientations de $\Delta^\perp$ donne le même angle).

Exercice 2

R 5 *Posons $f(x) = (1 - x^2) P'(x)$.*
On a $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2) P'(x) Q'(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x) Q'(x)\, dx = [f(x) Q(x)]_{-1}^{1} -. \int_{-1}^{1} f'(x) Q(x)\, dx$
$\displaystyle= \int_{-1}^{1} (2xP'(x) + (x^2 - 1) P''(x)) Q(x)\, dx = (u(P)|Q)$.

R 6 *En échangeant les rôles de P et Q dans la question précédente, on obtient*
$\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2) P'(x) Q'(x)\, dx = (u(Q)|P)$ *donc $(u(P)|Q) = (P|u(Q))$.*

R 7 *D'une part $(u(P)|P) = (\lambda P|P) = \lambda \|P\|^2$.*
D'autre part, $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)(P'(x))^2\, dx = (u(P)|P)$ et $(1 - x^2)(P'(x))^2 \geq 0$ si $x \in [-1, 1]$ donc $(u(P)|P) \geq 0$.
On en déduit que $\lambda \|P\|^2 \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$ car P est non nul.

Problème

Préliminaires

R 8 *Cas particulers:*

a *Si A est symétrique alors $A \times A^T = A \times A = A^T \times A$ donc A est normale.*

b *Si A est antisymétrique alors $A \times A^T = A \times (-A) = (-A) \times A = A^T \times A$ donc A est normale.*

c *Si A est une matrice orthogonale alors A est inversible d'inverse A^T donc $A \times A^T = A^T \times A = I_n$ donc A est normale.*

R 9 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Posons $B = P^{-1}AP = P^T AP$.*
On a $B^T \times B = \left(P^T AP\right)^T \times \left(P^T AP\right) = \left(P^T A^T P\right) \times \left(P^T AP\right) = P^T A^T \left(PP^T\right) AP = P^T A^T AP$
donc $B^T \times B = P^T AA^T P$ car A est normale donc $B^T \times B = \left(P^T AP\right)\left(P^T A^T P\right) = B \times B^T$ donc B est une matrice normale.

R 10 *On suppose que A est une matrice normale.*

a *On remarque que $A^2 A^T = A\left(AA^T\right) = A\left(A^T A\right) = \left(AA^T\right)A = \left(A^T A\right)A = A^T A^2$.*
Par récurrence immédiate, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^i A^T = A^T A^i.}$
On pose $P = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i X^i$.
On a $P(A) \times A^T = \left(\sum\limits_{i=0}^{k} a_i A^i\right) \times A^T = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i A^i A^T = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i A^T A^i = A^T \sum\limits_{i=0}^{k} a_i A^i = A^T \times P(A)$.

c *On a $(P(A))^T = \left(\sum\limits_{i=0}^{k} a_i A^i\right)^T = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \left(A^i\right)^T$ (linéarité de la transposition) et comme $(MN)^T = N^T M^T$, on a $\left(A^i\right)^T = \left(A^T\right)^i$ donc $(P(A))^T = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \left(A^T\right)^i$.*
On a donc $P(A)^T \times P(A) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \left(A^T\right)^i P(A)$ et, comme $A^T \times P(A) = P(A) \times A^T$, on obtient $\left(A^T\right)^i \times P(A) = P(A)\left(A^T\right)^i$ par récurrence (idem précédemment) donc $P(A)^T \times P(A) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \left(A^T\right)^i P(A) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i P(A)\left(A^T\right)^i = P(A) \sum\limits_{i=0}^{k} a_i \left(A^T\right)^i = P(A)(P(A))^T$.
donc $P(A)$ est une matrice normale.

R 11 *Etude de R_θ:*

a $\chi_{R_\theta}(x) = \det\left(xI_2 - R_\theta\right) = \begin{vmatrix} x - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & x - \cos(\theta) \end{vmatrix} = x^2 - 2x\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = x^2 - 2x\cos\theta + 1.$
On a $\Delta = 4\left(\cos^2(\theta) - 1\right) = -\left(2\sin(\theta)\right)^2$.

b *Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, $R_\theta = I_2$ et si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, $R_\theta = -I_2$ donc R_θ est diagonalisable.*
Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, alors $\Delta < 0$ donc $sp(R_\theta) = \emptyset$ donc R_θ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c *Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, R_θ est diagonale donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.*
Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, alors $\Delta < 0$ et R_θ est une matrice de taille 2 et admet deux valeurs propres complexes conjuguées distinctes $\dfrac{2\sin(\theta) \pm 2i\sin(\theta)}{2} = e^{\pm i\theta}$ donc R_θ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et est semblable à $D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

R 12 *La matrice A est diagonalisable donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale.*
On a $D^p = \left(PAP^{-1}\right)^p = PA^pP^{-1} = 0$ car $A^p = 0$.
Si $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors $D^p = diag\left(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p\right) = 0$ donc $\lambda_i^p = 0$ donc $\lambda_i = 0$ donc $D = 0$ donc $A = 0$.
Autre méthode: X^p est polynôme annulateur de A donc $sp(A) \subset \{0\}$. A est diagonalisable donc semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont nuls donc A est semblable à la matrice nulle donc est nulle.

R 13 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 - A + I_n = 0$.*

a *Le polynôme* $P = X^2 - X + 1$ *est un polynôme annulateur de* A *et son discriminant* $\Delta = -3 < 0$ *donc* $sp(A) = \emptyset$.

Les racines complexes de P *sont* $\lambda_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ *et* $\lambda_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ *donc* P *est scindé à racines simples dans* $\mathbb{C}[X]$ *donc* A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $sp(A) \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

b *La matrice* A *est semblable à* $D = diag\left(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1\ fois}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_2\ fois}\right)$ *avec* $m_i \geq 0$.

Les matrices A *et* D *sont semblables donc* $\chi_D = \chi_A \in \mathbb{R}[X]$ *dont les racines complexes conjuguées ont même multiplicité donc* $m_1 = m_2$.

On en déduit que $n = 2m_1$ *est pair* $tr(A) = m_1(\lambda_1 + \lambda_2) = m_1 \in \mathbb{N}^*$.

R 14 *Soit* u *et* v *deux endomorphismes de* E. *On suppose* $u \circ v = v \circ u$.

a *Soit* $x \in \ker(u)$. *On a* $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0) = 0$ *donc* $v(x) \in \ker(u)$ *donc* $\ker(u)$ *est stable par* v.

(ou on applique le théorème du cours: $E_0(u)$ *est stable par* v*).*

b *Soit* $x \in \operatorname{Im}(u)$. $\exists t \in E, x = u(t)$. *On a donc* $v(x) = v(u(t)) = u(v(t)) \in \operatorname{Im}(u)$ *donc* $\operatorname{Im}(u)$ *est stable par* v.

Matrices normales de taille 2

R 15 *On a*

$$AA^T = A^TA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = b^2 \\ ab+cd = ac+bd \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ ab+bd = ab+bd \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} c = -b \\ ab-bd = -ab+bd \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c = b \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c = -b \\ b(a-d) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c = b \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c = -b \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c = -b \\ a = d \end{cases}$$

Le deuxième cas est compris dans le premier cas, d'où :

A *est une matrice normale ssi* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ *ou* $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

R 16 *Pour* $(a,b) \neq (0,0)$, $a + ib \neq 0$,*donc* $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\exists \rho > 0 \ / \ a + ib = \rho e^{i\theta}$ *soit* $\begin{cases} a = \rho\cos(\theta) \\ b = \rho\sin(\theta) \end{cases}$,

donc $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} = \rho R_\theta$. *Réciproquement toute matrice de la forme* ρR_θ, *avec* $\rho > 0$, *est de la forme* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, *d'où :*

$\boxed{A \text{ est une matrice normale ssi } A \text{ est symétrique réelle ou bien } \exists \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \ / \ A = \rho R_\theta.}$

R 17 *On a* $A^2 - A + I_2 = 0$ *donc d'après la question 13* $sp(A) = \emptyset$ *donc* A *n'est pas symétrique d'après le théorème spectral.*

De plus, $sp_{\mathbb{C}}(A) = \left\{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ *et* $A = \rho R_\theta$ *avec* $\rho > 0$ *donc d'après la question 11* $sp_{\mathbb{C}}(A) =$

$\left\{\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta}\right\}$. *On en déduit que* $\rho = 1$ *et* $\theta \in \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$ *donc* $A = R_{\frac{\pi}{3}}$ *ou* $A = R_{-\frac{\pi}{3}}$.
Réciproquement, si $A = R_{\frac{\pi}{3}}$ *ou* $A = R_{-\frac{\pi}{3}}$, *A est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *et* $sp_{\mathbb{C}}(A) = \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$ *donc* $\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$ *est polynôme annulateur de* A *soit* $A^2 - A + I_2 = 0$ *et* A *est normale.*
Les solutions sont donc les matrices $R_{\frac{\pi}{3}}$ *et* $R_{-\frac{\pi}{3}}$.

Adjoint d'un endomorphisme

R 18 *On a sons* $P = P_{B_0 \to B} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *car* B_0 *et* B *sont orthonormée et* $M = mat_B(f)$.
On a $A = mat_{B_0}(f)$ *donc* $M = P^{-1}AP = P^TAP$ *car* $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *donc*
$(M)^T = \left(P^TAP\right)^T = P^TA^TP = P^{-1}\left(A^T\right)P = mat_B(f^*)$ *car* $\left(A^T\right) = mat_{B_0}(f^*)$.

R 19 *On a* $\chi_{f^*}(x) = \det(xid - f^*) = \det\left(xI_n - A^T\right) = \det\left((xI_n - A)^T\right)$ *par linéarité de la transposition.*
Or $\det(M) = \det\left(M^T\right)$ *donc* $\chi_{f^*}(x) = \det(xI_n - A) = \chi_f(x)$ *donc* $sp(f) = sp(f^*)$.

R 20 *Soit* $(x, y) \in E^2$ *et* X *et* Y *les vecteurs colonne coordonnée de* X *et* Y *dans la base* B_0.
$\langle f(x) | y\rangle = (AX)^T \times Y = \left(X^T A^T\right)Y = X^T \times \left(A^TY\right) = \langle x|f^*(y)\rangle$.
Donc $\boxed{\forall (x, y) \in E,\ \langle f(x) | y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle.}$

R 21 *Soit* $g \in \mathcal{L}(E)\ /\ \forall (x, y) \in (E)^2,\ \langle f(x) | y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$.
On a alors $\forall (x, y) \in (E)^2,\ \langle x|f^*(y)\rangle = \langle x|g(y)\rangle$,
Soit $y \in E$. *On a alors :*$\forall x \in E,\ \langle x|f^*(y) - g(y)\rangle = 0$ *par bilinéarité du produit scalaire,*
donc $f^*(y) - g(y) \in (E)^\perp$. *Or* $(E)^\perp = \{0\}$, *donc* $f^*(y) = g(y)$.
L'égalité étant vrai pour y quelconque $\boxed{g = f^*}$.
Donc $\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme de } E \text{ tel que : } \forall (x, y) \in (E)^2,\ \langle f(x) | y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle.}$

R 22 *Soit* $x \in F^\perp$. *Montrons que* $f(x) \in F^\perp$. *Soit* $y \in F$.
D'après la question 20 $\langle f(x) | y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle$ *et* F *est stable par* f^*, *donc* $f^*(y) \in F$.
Comme $x \in F^\perp$, *on a* $\langle x|f^*(y)\rangle = 0$.
Donc $\forall y \in F$, $\langle f(x) | y\rangle = 0$, *donc* $f(x) \in F^\perp$ *donc* $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f.}$
On montre de même que $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f^*.}$

Endomorphisme normal

R 23 *Soit* B *une base orthonormée de* E *et* $A = mat_B(f)$. *On a donc* $A^T = mat_B(f^*)$.
f *est normal* $\Leftrightarrow f^* \circ f = f \circ f^* \Leftrightarrow A^T \times A = A \times A^T \Leftrightarrow A$ *est est une matrice normale.*

R 24 *Soit* B *une base orthonormée de* E *et* $A = mat_B(f)$.
L'endomorphisme f *est normal donc* A *est une matrice normale.*
Soit $x \in E$ *et* X *son vecteur colonne coordonnées dans la base* B.
On a $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = (AX)^T \times (AX) = X^TA^TAX \underbrace{=}_{A \text{ est normale}} X^TAA^TX$.
Donc $\|f(x)\|^2 = \left(A^TX\right)^T \times \left(A^TX\right) = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle = \|f^*(x)\|^2$.
Donc $\boxed{\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|f^*(x)\|.}$

R 25 *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *tel que* $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

a *Soit* $(x, y) \in (E)^2$.

$$\|f(x + y)\|^2 \underbrace{=}_{f \text{ est linéaire}} \|f(x) + f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle.$$

De même, $\|f^*(x+y)\|^2 \underbrace{=}_{f^* \text{ est linéaire}} \|f^*(x)+f^*(y)\|^2 = \|f^*(x)\|^2 + \|f^*(y)\|^2 + 2\langle f^*(x), f^*(y)\rangle$.
Or, par hypothèse $\|f^*(x+y)\| = \|f(x+y)\|$, $\|f^*(x)\| = \|f(x)\|$ *et* $\|f^*(y)\| = \|f(y)\|$.
Donc $\forall (x,y) \in (E)^2$, $\langle f^*(x), f^*(y)\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$.

b *On a* $A = mat_{B_0}(f)$ *donc* $f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}e_k$ *donc* $\langle f(e_i)|f(e_j)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}e_k | \sum_{i=1}^{n} a_{k,j}e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$.
Et, en posant $A' = A^T$, *on a* $b_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a'_{i,k}a_{k,j}.\sum_{i=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$ *donc* $\langle f(e_i)|f(e_j)\rangle = b_{i,j}$.

c *En posant* $C = A \times A^T = \left(A^T\right)^T \times A$, *on obtient de même* $\langle f^*(e_i)|f^*(e_j)\rangle = c_{i,j}$ *donc* $B = C$ *donc* A *est normale*
Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme normal.}}$

Matrices normales et polynômes annulateurs.

R 26 *La matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est normale et* $A^p = 0$.

a *On a* $S^p = \left(A^T \times A\right)^p = \left(A^T \times A\right)\ldots\left(A^T \times A\right) = \left(A^T\right)^p A^p = 0$ *car* A *est normale.donc on peut permuter les produits.*

b *Or* $S^T = \left(A^T \times A\right)^T = A \times A^T = S$ *donc* S *est symétrique réelle donc diagonalisable (théorème spectral) donc, d'après la question 12, on a* $S = 0$.

c *On en déduit que* $A^T \times A = 0$ *donc en considérant le produit scalaire usuel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A|A) = tr\left(A^T \times A\right) = 0$ *donc* $A = 0$.

R 27 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est matrice normale donc* $P(A)$ *est normale. De plus,* $P^q(A) = P(A)^q$ *(propriété des polynômes de matrices). D'après la question précédente, si* $(P(A))^q = 0$ *alors* $P(A) = 0$ *car* $P(A)$ *est normale.*

R 28 *Application: Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tel que* $M^2 + M - M^T = I_n$.

a *Par hypothèse,* $M^2+M-M^T = I_n$, *donc* $M^T = M^2+M-I_n$.*Donc* $M = \left(M^2+M-I_n\right)^T = \left(M^T\right)^2 + M^T - I_n = \left(M^2+M-I_n\right)^2 + \left(M^2+M-I_n\right) - I_n$.
Les puissances de M *commutant entre elles, on obtient en développant par la formule du binôme,*
$M = \left(M^4 + M^2 + I_n + 2M^3 - 2M^2 - 2M\right) + \left(M^2 + M - I_n\right) - I_n$.
Donc $M^4 + 2M^3 - 2M - I_n = 0$.
Donc $\boxed{P = X^4 + 2X^3 - 2X - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } M.}$

b *On remarque que* 1 *et* -1 *sont des racines de* P, *donc* $\boxed{P = \left(X^2-1\right)\left(X^2+2X+1\right) = (X-1)(X+1)^3}$
Donc $Q = (X-1)^3(X+1)^3 = (X-1)^2 P$ *donc* $Q(M) = (M-I_n)^2 P(M) = 0$ *donc* Q *est aussi un polynôme annulateur de* M: $\boxed{(M-I_n)^3(M+I_n)^3 = 0.}$

c *On a* $M^T = M^2 + M - I_n$ *donc* M^T *est un polynôme en* M *donc commute avec* M *donc* M *est une matrice normale. En posant* $Q = (X-1)(X+1)$, *on a* $Q^3(M) = 0$ *donc* $Q(M) = 0$ *donc* $\boxed{M^2 = I_n}$. *On en déduit* $M^T = M^2 + M - I_n = M$ *donc* $\boxed{M \text{ est une matrice symétrique réelle.}}$.

R 29 A *est une matrice non nulle, donc* A *admet un polynôme annulateur non nul noté* R.
Supposons alors R *constant égal à* α. *On a alors* $R(A) = \alpha I_n$. *Or* $\alpha \neq 0$ *car* R *polynôme non nul, donc* $R(A) \neq 0$. *On obtient une contradiction avec* R *polynôme annulateur. Donc* R *est un polynôme annulateur non constant de* A. *D'après le théorème de factorisation dans* $\mathbb{R}[X]$, *on a :*

$R = a\prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)^{k_j}\prod_{m=1}^{s}(X^2+\beta_m X+\gamma_m)^{l_m}$ *,où* $\alpha_1,...,\alpha_p$ *sont les* p *racines réelles deux à deux distinctes de* R *et* $k_1,...,k_p$ *leurs multiplicités respectives,* a *est le coefficient dominant de* R*, et où les polynômes du second degré à coefficients réels* $X^2+\beta_m X+\gamma_m$ *n'ont pas de racine réelle, mais des racines complexes non réelles conjuguées (ce qui se traduit par* $\beta_m^2-4\gamma_m<0$*).*
Posons $P=\prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)\prod_{m=1}^{s}(X^2+\beta_m X+\gamma_m)$ *et* $q=\max(k_1,k_2,...,k_p,l_1,...,l_s)$. $q\in\mathbb{N}^*$ *car* $\deg(R)\geqslant 1$.
On a alors R *divise* P^q *et si on note* Q *le polynôme tel que* $P^q=Q\times R$*, on a* $P^q(A)=Q(A)\times\underbrace{R(A)}_{=0}=0$.

On a donc A *matrice normale,* P *polynôme et* $q\in\mathbb{N}^*$ *tels que* $P^q(A)=0$.
Donc, d'après la question 27, $P(A)=0$.
Pour $m\in[\![1,s]\!]$, $X^2+\beta_m X+\gamma_m$ *admet deux racines complexes conjuguées (distinctes) que l'on note* z_m *et* $\overline{z_m}$.
D'où : $P=\prod_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)\prod_{m=1}^{s}(X-z_m)(X-\overline{z_m})$.
R *étant non constant,* p *ou* s *est un entier supérieur ou égal à* 1*, donc* P *est de degré au moins* 1 *et n'admet que des racines complexes simples. Donc :*
$\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } \mathbb{R}[X], \text{ de degré au moins } 1}$
$\boxed{\text{et dont toutes les racines complexes sont de mutiplicité } 1.}$

On en déduit que A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Réduction des endomorphismes normaux

R 30 *On suppose que* B *est une base orthonormée et* $A'=mat_B(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \lambda_p & \ddots & (0) & \vdots\\ \vdots & (0) & \ddots & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{\theta_s}\end{pmatrix}$.

On a $(A')^T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \lambda_p & \ddots & (0) & \vdots\\ \vdots & (0) & \ddots & \rho_1 R_{-\theta_1} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{-\theta_s}\end{pmatrix}$. *On a* $R_{-\theta_i}R_{\theta_i}=I_2=R_{-\theta_i}R_{\theta_i}$ *donc (en faisant le produit de latricees diagonales par blocs,* $(A')^T\times A'=A'\times(A')^T$ *donc* f *est un endomorphisme normal.*

R 31 f *est un endomorphisme normal, donc d'après la question 24*
$\forall x\in E,\ \|f(x)\|=\|f^*(x)\|$. *Soit* $x\in E$.
$x\in\ker(f)\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow\|f(x)\|=0\underbrace{\Leftrightarrow}_{f\ normal}\|f^*(x)\|=0\Leftrightarrow f^*(x)=0\Leftrightarrow x\in\ker(f^*)$.

Donc $\boxed{\ker(f)=\ker(f^*).}$

R 32 *Si* B_0 *est une base orthonormée et* $A=mat_B(f)$*. Posons* $B=mat_{B_0}(f-\lambda id_E)=A-\lambda I_n=P(A)$ *avec* $P=X-\lambda$*. La matrice* B *est normale d'après la question 10. On en déduit que* $f-\lambda id_E$ *est un endomorphisme normal.*
On a $mat_{B_0}((f-\lambda id_E)^*)=B^T=(A-\lambda I_n)^T=A^T-\lambda I_n=mat_{B_0}(f^*-\lambda id_E)$*. On en déduit que* $(f-\lambda id_E)^*=f^*-\lambda id_E$.
donc $\ker(f-\lambda id_E)=\ker((f-\lambda id_E)^*)=\ker(f^*-\lambda id_E)$ *d'après la question précédente.*

R 33 *On suppose F stable par f et f^*.*
On a $\forall (x,y) \in F^2$, $\langle f(x) | y\rangle = \langle x | f^*(y)\rangle$ *donc* $f_F^* \left\{ \begin{array}{c} F \to F \\ y \mapsto f^*(y) \end{array} \right.$ *est l'unique g endomorphisme de F vérifiant* $\forall (x,y) \in F^2$, $\langle f_F(x) | y\rangle = \langle x | g(y)\rangle$. *On a donc* $\boxed{(f_F)^* = f_F^*}$.
$f_F \circ (f_F)^*(x) = f \circ f^*(x) = f^* \circ f(x) = (f_F)^* \circ (f_F)(x)$.
Donc $f_F \circ (f_F)^* = (f_F)^* \circ (f_F)$, *et* $\boxed{f_F \text{ est un endomorphisme normal de } F.}$

R 34 *On a* $Q(f) \circ f = (Q \times X)(f) = (X \times Q)(f) = f \circ Q(f)$ *donc d'après la question 14* $\boxed{F = \ker(Q(f)) \text{ est stable par } f.}$
L'endomorphisme f est normal donc $f^* \circ f = f \circ f^*$. On en déduit (raisonnement déjà vu pour les matrices) que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^* \circ f^i = f^i \circ f^*$ et donc que $f^* \circ Q(f) = Q(f) \circ f^*$ donc on obtient de même $\boxed{F = \ker(Q(f)) \text{ est stable par } f.}$

R 35 *On suppose $sp(f) = \emptyset$*

a *D'après la question 29, f admet un polynôme annulateur* $P = \prod_{j=1}^{p} (X - \alpha_j) \prod_{m=1}^{s} \underbrace{\left(X^2 + \beta_m X + \gamma_m\right)}_{\Delta<0}$.

donc $P(f) = (f - \alpha_1 id_E) \circ \cdots \circ (f - \alpha_p id_E) \circ (f^2 + \beta_1 f + \gamma_1 id_E) \circ \cdots \circ (f^2 + \beta_s f + \gamma_s id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
La composée d'isomorphismes est un isomorphisme donc un des endomorphismes $(f - \alpha_j id_E)$ et $(f^2 + \beta_m f + \gamma_m id_E)$ n'est pas un isomorphisme.
Comme $sp(f) = \emptyset$, l'endomorphisme $f - \alpha_j id_E$ est injectif donc bijectif (dimension finie).
On en déduit qu'il existe $m \in [[1, s]]$ tel que $f^2 + \beta_m f + \gamma_m id_E$ n'est pas bijectif donc pour lequel $\ker(f^2 + \beta_m f + \gamma_m id_E) \neq \{0\}$.

b *On a $g = f_F + f_F^*$. Soit B une base orthonormée de F.*
On a $mat_B(g) = mat_B(f_F) + mat_B(f_F^*) = M + M^T$ *avec* $M = mat_B(f_F)$.
Or $\left(M + M^T\right)^T = M + M^T$ *donc* $M + M^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *donc, d'après le théorème spectral,* $sp(g) = sp\left(M + M^T\right) \neq \emptyset$.

c *Posons $G = Vect(e, f(e))$. Le vecteur $f(e)$ n'est pas colinéaire à e car $sp(f) = \emptyset$ donc $\dim(G) = 2$.*
Par hypothèse, $e \in F = \ker(f^2 + af + bid_E)$ donc $f^2(e) + af(e) + be = 0$ donc $f^2(e) = -af(e) - be$.
On a $f(e) \in G$ et $f(f(e)) \in G$ donc $\boxed{G \text{ est stable par } f}$
(si $x = \alpha e + \beta f(e)$ alors $f(x) = \alpha f(e) + \beta f^2(e) \in G$).

d *On a $g(e) + g^*(e) = \lambda e$, donc $f^*(e) = \lambda e - f(e) \in G$*
et $f^*(f(e)) \underbrace{=}_{f \text{ est normal}} f(f^*(e)) \in G$ *car $f^*(e) \in G$ qui est stable par f d'après la question précédente.*
On en déduit que G est stable par f^*.

R 36 *Si $sp(f) = \emptyset$, la question précédente montre qu'il existe un sous-espace de dimension 2 stable par f et f^*.*
Si $sp(f) = \emptyset$ et e est un vecteur propre de f, alors e est un vecteur propre de f^* d'aprés la question 32 et vect(e) *sous-espace de dimension 1 stable par f et f^**

R 37 *Montrons par récurrence sur* $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ *la propriété* $(\mathcal{H}_n)$:
Si f est un endomorphisme normale de E, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs de la forme :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$
où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des réels,

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ sont des réels strictement positifs et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ des réels.
Pour $n = 1$. Toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est de la forme (λ), donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
Pour $n = 2$. Alors d'après la question 16, la matrice A de f (endomorphisme normal) dans une base orthonormale est soit symétrique réelle, soit de la forme ρR_θ.
- Si A symétrique réelle alors $sp(f) = sp(A) \neq \emptyset$ donc il existe e_1 vecteur propre unitaire de f. Le sous-espace $vect(e_1)$ est stable par f et f^* donc $vect(e_1)^\perp$ est stable par f et est de dimension 1. Soit e_2 un générateur unitaire $vect(e_1)^\perp$. On a $f(e_2) \in vect(e_1)^\perp = vect(e_2)$ donc e_2 est vecteur propre de f et $mat_{(e_1,e_2)}(f)$ est diagonale. (on peut aussi appliquer le théorème spectral).
- Si A est de la forme ρR_θ la conclusion est vraie donc $\mathcal{H}_2$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies.
Soit f un endomorphisme de E avec $\dim(E) = n + 2$.
D'après la question 36 il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension 1 ou 2 stable par f et f^*.
- Si $\dim(F) = 1$. Alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de F telle que $mat_{\mathcal{B}_1}(f_F) = (\lambda)$.
Dans ce cas $\dim\left(F^\perp\right) = n + 1$, et $F^\perp$ est stable par f et f^* d'après la question 22 et $f_{F^\perp}$ est un endomorphisme normal de $F^\perp$.
Donc, par $\mathcal{H}_{n+1}$, on peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $F^\perp$, telle que $mat_{\mathcal{B}_2}(f_{F^\perp})$ soit de la forme demandée.
F et $F^\perp$ sont orthogonaux et supplémentaires, donc en juxtaposant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, on a bien une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $mat_{\mathcal{B}}(f)$ soit de la forme demandée.
- Si $\dim(F) = 2$ alors, d'après $\mathcal{H}_2$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1$ de F telle que $mat_{\mathcal{B}_2}(f_F)$ soit diagonale ou de la forme ρR_θ. On a $\dim\left(F^\perp\right) = n$, et par $\mathcal{H}_n$ et les mêmes arguments qu'au point précédent, on peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}_2$ de $F^\perp$, telle que $mat_{\mathcal{B}_2}(f_{F^\perp})$ soit de la forme demandée.
On juxtapose $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$, et on trouve bien une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $mat_{\mathcal{B}}(f)$ soit de la forme demandée.
Donc $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie ce qui achève la démonstration.

Etude d'un exemple.

R 38 *On note $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On a donc $P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$.*
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $\left\{\begin{array}{l} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (z+1)^7 - z^7 = 1 \\ 7(z+1)^6 - 7z^6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (z+1)z^6 - z^7 = 1 \\ (z+1)^6 = z^6 \end{array}\right.$ *donc*
$\left\{\begin{array}{l} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z^6 = 1 \\ (z+1)^6 = z^6 \end{array}\right.$
Or $\left\{\begin{array}{l} z^6 = 1 \\ (z+1)^6 = z^6 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |z| = 1 \\ |z+1| = |z| \end{array}\right.$
et $|z+1| = |z| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ (mettre au carré et passer à la partie réelle et imaginaire).
Donc $\left\{\begin{array}{l} z^6 = 1 \\ (z+1)^6 = z^6 \end{array}\right. \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ *ou* $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$.
Réciproquement si $z = j$, $z^6 = (j^3)^2 = 1$ et $(z+1)^6 = (-j^2)^6 = 1$ donc j est racine multiple de P.
On en déduit que $j^2 = \overline{j}$ est racine de même multiplicité de P car $P \in \mathbb{R}[X]$.

R 39 *On remarque que 0 et -1 sont deux racines évidentes de P.*
En développant avec Newton, on trouve que $\deg(P) = 6$ et que le coefficient dominant de P est 7.
On en déduit que $\boxed{P = 7X(X+1)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 \left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)^2.}$
Or $\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) = X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X + 1$, *d'où* $\boxed{P = 7X(X+1)(X^2 + X + 1)^2.}$

R 40 *Comme A est inversible et $7A(A + I_n)(A^2 + A + I_n)^2 = 0$ donc $(A + I_n)(A^2 + A + I_n)^2 = 0$ donc $sp(A) \subset \{-1, j, j^2\}$.*
Si f est canoniquement associée à A, f est un endomorphisme normale donc il existe une base orthonormée de

E *dans laquelle la matrice de* f *est de la forme* $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}$ *avec* $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

On a d'une part $sp\,(M) = sp\,(A) \subset \{-1, j, j^2\}$ *et d'autre part* $\lambda_i \in sp\,(M)$ *et* $sp\,(\rho_1 R_{\theta_1}) \subset sp\,(M)$ *(car* $\rho_1 R_{\theta_1}$ *est la matrice d'un endomorphisme induit par* f *sur un sous-espace vectoriel stable par* F *de dimension* 2*).*

On en déduit que $\lambda_i = 1$ *et* $\rho_i e^{i\theta_i} = j$ *ou* j^2 *donc* $\rho_i = 1$ *et* $\theta_i \equiv \pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

On a donc $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & R_s \end{pmatrix}$ *avec* $R_i = R_{\frac{2\pi}{3}}$ *ou* $R_i = R_{-\frac{2\pi}{3}}$.

On notera $M = diag\,(-1, ..., -1, R_1, ..., R_s)$ *même si* H *n'est pas diagonale mais juste "diagonale par blocs", puisque* R *est une matrice de* $\mathcal{M}_2\,(\mathbb{R})$.

On a $M^T M = diag\,(-1, ..., -1, R_1, ..., R_s)^T \times diag\,(-1, ..., -1, R_1, ..., R_s) = diag\left((-1)^2, ..., (-1)^2, (R_1)^T R_1, ..., (R_s)^T\right.$
I_n *car* $(R_1)^T R_1 = I_n$.
d'ou $M \in O_n\,(\mathbb{R})$ *donc* f *isométrie vectorielle donc* $A \in O_n\,(\mathbb{R})$.

Exercice 3:

Indication: discussion suivant le cardinal de l'ensemble des points fixes de f. Résultat sous forme de somme avec coefficients binômiaux et puissances.