DS3 bis mercredi 20/11/25 (durée 3h)

Le sujet comporte 3 pages

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Les questions doivent être rédigées dans l'ordre (quitte à laisser de la place pour revenir sur une question ultérieurement).

UTILISER DE PREFERENCE UN STYLO NOIR NON EFFACABLE NE PAS UTILISER DE BLANCO.

Exercice:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightharpoonup \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{array} \right.$. On admet que u est linéaire.

Q 1 *Déterminer le polynôme caractéristique de l'endomorphime u.*

Q 2 *En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton en déduire que:*
$\exists (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(X+n) + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i P(X+i) = 0.$

Q 3 *Montrer que* $\forall k \in [[0, n-1]],\ n^k = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k$

Exercice:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que $AN = NA$ et qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$

On suppose dans les 4 questions suivantes que A inversible.

Q 4 *Démontrer que* $A^{-1}N = NA^{-1}$.

Q 5 *Montrer que* $(A^{-1}N)^k = 0$. *En déduire que le spectre de* $(A^{-1}N)$ *est le singleton* $\{0\}$.

Q 6 *En déduire que* $\det(I_n + A^{-1}N) = 1$.

Q 7 *En déduire que* $\det(A + N) = \det(A)$.

On suppose A non inversible

Q 8 *Justifier qu'il existe* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $(A+N)^k = A \times B$.

Q 9 *En déduire que* $\det(A + N) = \det(A)$.

Problème:

On considère $E = \mathbb{R}[\mathbb{X}]$ et on pose pour $(P, Q) \in E^2$, $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x) Q(x)\, dx$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$, $F_n = vect\left(\{X^{2i},\ i \in \mathbb{N},\, 0 \leq 2i \leq n\}\right)$ et $G_n = vect\left(\{X^{2i+1},\ i \in \mathbb{N},\, 0 \leq 2i+1 \leq n\}\right)$.

Préliminaire: un calcul d'intégrale

On pose, pour $k \in [[0, n]]$, $I_k = \int_{-1}^{1} (x-1)^{n-k} (x+1)^{n+k}\, dx$.

Q 10 *Calculer I_n.*

Q 11 *Pour $k \in [[0, n-1]]$, montrer que $I_k = -\dfrac{n-k}{n+k+1} I_{k+1}$.*

Q 12 *En déduire que $\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx = (-1)^n \dfrac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$.*

Première partie

Q 13 *Justifier précisement que $\forall P \in E$, $(P \mid P) = 0 \Rightarrow P = 0$.*

On admet dans la suite que l'égalité $(P \mid Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x) Q(x)\, dx$ définit un produit scalaire de E donc sur E_n.

Q 14 *Soit $P \in E_n$. Justifier que les deux assertions (i) et (ii) sont équivalentes:*
$(i) : \forall x \in [-1, 1]$, $P(-x) = P(x)$.
$(ii) : P \in F_n$.
Citer sans démonstration un résultat similaire concernant G_n.

Q 15 *On se place dans l'espace euclidien E_n.*
Montrer que $G_n = (F_n)^{\perp}$ (on pourra faire un changement de variable et on ne se contentera pas d'une simple inclusion).
Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in E_n$. Déterminer le projeté orthogonal de P sur F_n.

Q 16 *Dans cette question on suppose que $n = 3$ et on pose $P = 1 + X + X^2 + X^3$.*
Déduire de la question précédente la valeur de $\alpha = \inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P(x) - (a + bx^2)\right)^2 dx$.

Deuxième partie

On veut établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'une famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E_n vérifiant:

$$(C_n) : \begin{cases} (1) : \forall k \in [[0, n]],\ \deg(P_k) = k \text{ et } P_k \text{ est de coefficient dominant égal à } 1, \\ (2) : \forall (i, j) \in [[0, n]]^2,\ i \neq j \Rightarrow (P_i | P_j) = 0. \end{cases}$$

Q 17 *Montrer ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.*
On pourra supposer qu'une famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E_n vérifie (C_n) et s'intéresser à la dimension de $vect(P_0, P_1, \ldots, P_n)^{\perp}$ dans l'espace E_{n+1}.

La construction précédente étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc en déduire qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant:

$$(C) : \begin{cases} (1) : \forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n \text{ et } P_n \text{ est de coefficient dominant égal à } 1 \\ (2) : \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0 \end{cases}.$$

Q 18 *Montrer que si n est pair alors $P_n \in F_n$ et si n impair alors $P_n \in G_n$.*

Soit $n \geq 2$.

Q 19 *Montrer que $P_{n+1} - XP_n \in E_n$.*
Déduire de la question précédente que $P_{n+1} - XP_n \in E_{n-1}$.

Q 20 *Montrer que, $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à E_{n-2}.*

Q 21 *Déduire des questions précédentes qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$.*

Troisième partie: Expression des polynômes P_n

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = A_n^{(n)}$.

Q 22 *Montrer que L_n est un polynôme de degré n et déterminer son coefficient dominant.*

Q 23 *En utilisant la formule de Leibniz, calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.*

Q 24 *Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si $k \leq m-1$, alors $\left(A_n^{(n+k)}|A_m^{(m-k)}\right) = -\left(A_n^{(n+k+1)}|A_m^{(m-k-1)}\right)$.*

Q 25 *On suppose que $n < m$. montrer que $(L_n|L_m) = 0$.*

Q 26 *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $P_n = \alpha_n L_n$.*

Q 27 *Montrer que $\|L_n\|^2 = (-1)^n \times (2n)! \times \int_{-1}^{1} A_n(x)\,dx$ et en déduire la valeur de $\|L_n\|^2$.*

Quatrième partie: racines des polynômes L_n

On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$

Q 28 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E_{n-1}$. Montrer que $(P|L_n) = 0$.*

Q 29 *En utilisant la nullité de $(1|L_n)$, justifier que L_n admet une racine $\alpha_1 \in]-1,1[$.*

Q 30 *On suppose que $n \geq 2$. On note k le nombre de racines de L_n appartenant à $]-1,1[$ et qui ont une multiplicité impaire. Montrer que $k = n$. (on pourra supposer $k < n$ et introduire un polynôme $P \in E_{n-1}$ bien choisi).*

Conclusion: L_n est scindé dans $\mathbb{R}$ et à racines simples appartenant à $]-1,1[$.

Q 31 *Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème de Rolle au polynôme A_n.*

PSI DS3 bis Corrigé

Exercice 1:

R 1 *On a* $u(X^i) = (X+1)^i = X^i + \sum\limits_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} X^k$ *donc la matrice* M *de* u *dans la base canonique* $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ *est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux valant* 1.
On en déduit que $\chi_u = \chi_M = (X-1)^n$.

R 2 *Le théorème de Calyey-Hamilton entraîne que* $P_0 = (X-1)^n$.*est un polynôme annulateur de* u. *Or* $P_0 = \sum\limits_{i=0}^{n} (1)^{n-i} \binom{n}{i} X^i$ *donc* $P_0(u) = \sum\limits_{i=0}^{n} (1)^{n-i} \binom{n}{i} u^i = 0_{L(E)}$
On en déduit que $\forall P \in E$,
Or $u(P) = P(X+1)$ *donc* $u^2(P) = u(P(X+1)) = P(X+2)$ *et, par récurrence immédiate,* $u^i(P) = P(X+i)$.
On a donc; $\forall P \in E$, $\;(P_0(u))(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} (1)^{n-i} \binom{n}{i} u^i(P) = 0_E$
soit $\sum\limits_{i=0}^{n} (1)^{n-i} \binom{n}{i} P(X+i) = 0$ *soit* $P(X+n) + \sum\limits_{i=0}^{n-1} (1)^{n-i} \binom{n}{i} P(X+i) = 0$.

R 3 *Soit* $k \in [[0, n-1]]$. *En prenant* $P = X^k$ *on obtient* $(X+n)^k = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} (1)^{n-i} \binom{n}{i} (X+i)^k$ *et en évaluant en* 0, $n^k = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k$.

Exercice 2:

R 4 $AN = NA$ *donc* $A^{-1}AN = A^{-1}NA$ *soit* $N = A^{-1}NA$ *donc* $NA^{-1} = A^{-1}NAA^{-1} = A^{-1}N$.

R 5 *D'où* $(A^{-1}N)^k = A^{-1}N \times A^{-1}N \times \cdots \times A^{-1}N = A^{-1} \times A^{-1} \times \cdots \times A^{-1} \times N \times \cdots \times N = (A^{-1})^k \times N^k = 0$.
D'où X^k.*est polynôme annulateur de* $(A^{-1}N)$ *et* 0 *est l'unique racine de* X^k *donc* $sp(A^{-1}N) \subset \{0\}$.
De plus $A^{-1}N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *donc* $sp(A^{-1}N) \neq \emptyset$ *donc* $sp(A^{-1}N) = \{0\}$

R 6 *Or* $A^{-1}N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est trigonalisable donc semblable à* T *triangulaire supérieure*
et donc $sp(A^{-1}N) = sp(T) = \{0\}$
Or $\chi_T = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - t_{i,i})$ *donc* $\forall i \in [[1, n]]$, $t_{i,i} = 0$.
Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $P^{-1}(A^{-1}N)P = T$
on a $P^{-1}(I_n + A^{-1}N)P = P^{-1}(I_n)P + P^{-1}(A^{-1}N)P = I_n + T$ *qui est triangulaire de coefficients diagonaux valant tous* 1
$(I_n + T)$ *et* $I_n + A^{-1}N$ *sont semblables donc* $\det(I_n + T) = \det(I_n + A^{-1}N)$ *donc* $\det(I_n + T) = 1$.

R 7 $A + N = A + AA^{-1}N = A(I_n + A^{-1}N)$ *donc* $\det(A+N) = \det(A) \times \det(I_n + A^{-1}N) = \det(A)$.

R 8 *On suppose* A *non inversible.*
$(A+N)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i N^{k-i} = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} A^i N^{k-i} = A \times \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} A^{i-1} N^{k-i} \right)$ *car* $N^k = 0$
donc $(A+N)^k = A \times B$ *avec* $B = \sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i} A^{i-1} N^{k-i}$.

R 9 *On a donc* $\det(A+N) = \det(A \times B) = \det(A)\det(B) = 0 = \det(A)$ *car* A *n'est pas inversible.*

Problème:

Préliminaire: un calcul d'intégrale

R 10 $I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^{2n}\, dx = \left[\dfrac{1}{2n+1}(x+1)^{2n+1}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{2^{2n+1}}{2n+1}$.

R 11 *On suppose* $0 \le k \le n-1$. *On a* $I_{k+1} = \int_{-1}^{1} (x-1)^{n-k-1}(x+1)^{n+k+1}\, dx$
donc $I_{k+1} = \left[\dfrac{1}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^{n+k+1}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \dfrac{n+k+1}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^{n+k}\, dx.$
On a donc $I_{k+1} = -\dfrac{n+k+1}{n-k} I_k$ *soit* $I_k = -\dfrac{n-k}{n+k+1} I_{k+1}$

R 12 *On a donc* $\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\, dx = I_0$ *et*

$$\begin{aligned}
I_0 &= -\frac{n}{n+1} I_1 \\
&= \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+2}\right) I_2 \\
&\ \vdots \\
&= \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+2}\right) \times \ldots \times \left(-\frac{1}{2n}\right) I_n
\end{aligned}$$

$$I_0 = (-1)^n \frac{(n!)}{(n+1)(n+2)\times\cdots\times(2n)} I_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} I_n = (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Première partie

R 13 *Soit* $P \in E$ *supposons* $(P \mid P) = 0$. *On a* $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(x)\, dx$ *et* P^2 *est positive et continue donc* $\forall x \in [-1,1]$, $P^2(t) = 0$. *On en déduit que* P *admet une infinité de racines donc est nul.*

R 14 *Posons* $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.*Soit* $P \in E_n$.
- *si* $\forall x \in [-1,1]$, $P(-x) = P(x)$ *alors*
$\forall x \in [-1,1]$, $\sum_{i=0}^{n} a_i (-x)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *donc* $\sum_{i=0}^{n} a_i \left(1-(-1)^i\right) x^i = 0.$
Or $\left(1-(-1)^i\right) = \begin{cases} 2 \text{ si } i \text{ est impair} \\ 0 \text{ si } i \text{ est pair} \end{cases}$. *Posons* $Q = 2\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} X^{2i+1}$. *On a donc* $\forall x \in [-1,1]$, $Q(x) = 0$ *donc* Q *admet une infinité de racines donc* $\forall i \in \left[\left[1; \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\right]\right]$, $a_{2i+1} = 0$ *donc* $Q \in F_n$.
- *si* $P \in F_n$ *alors* $P = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2i} X^{2i}$ *donc* $\forall x \in [-1,1]$, $P(-x) = P(x)$.
On a de même $(i') \Leftrightarrow (ii')$ *avec*
- $(i') : \forall x \in [-1,1]$, $P(-x) = -P(x)$.
$(ii) : P \in G_n$.

R 15 *Soit* $P \in G_n$. *Montrons* $P \in (F_n)^{\perp}$. *Soit* $Q \in F_n$.
On a $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x) Q(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (-P(-x)) Q(-x)\, dx$ *d'après la question précédente.*

Le changement de variable $u=-x$ *donne* $(P|Q)=\int_{1}^{-1} P(u)\,Q(u)\,du=-(P|Q)$ *donc* $(P|Q)=0$.
On en déduit que $G_n \subset (F_n)^{\perp}$.
$F_n = vect\left(\{X^{2i},\ i\in\mathbb{N},\ 0\leq 2i\leq n\}\right)$ *et* $G_n = vect\left(\{X^{2i+1},\ i\in\mathbb{N},\ 0\leq 2i+1\leq n\}\right)$.
donc $\dim(F_n)+\dim(G_n)=n+1=\dim(E_n)$ *et* $\dim(F_n)+\dim\left((F_n)^{\perp}\right)=n+1$ *donc* $\dim(G_n)=\dim\left((F_n)^{\perp}\right)$.
donc $G_n=(F_n)^{\perp}$.
Soit $P=\sum_{i=0}^{n} a_n X^n \in E_n$. *On a* $P=\underbrace{\sum_{i\in\mathbb{N},\ 2i\leq n} a_{2i}X^{2i}}_{P_1\in F_n}+\underbrace{\sum_{i\in\mathbb{N},\ 2i+1\leq n} a_{2i+1}X^{2i+1}}_{P_2\in G_n}$ *et* $G_n=(F_n)^{\perp}$ *donc* $p(F_n)=P_1$.

R 16 *Posons* $Q=a+bX^2$. *On* $\int_{-1}^{1}\left(P(x)-(a+bx^2)\right)^2dx=\|P-Q\|^2$ *donc*
$\alpha=\inf_{Q\in vect(1,X^2)}\|P-Q\|^2=(d(P,F_3))^2$.
D'après le cours, $d(P,F_3)=\|P-p(P)\|=\|P-P_1\|$ *avec* $P=1+X+X^2+X^3$ *et* $P_1=1+X^2$ *donc* $d(P,F_3)=\|X+X^3\|$.
Or $\|X+X^3\|^2=\|X\|^2+\|X^3\|^2+2\,(X|X^3)$ *et* $(X^i|X^j)=\left[\dfrac{x^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_{-1}^{1}=\dfrac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1}$
donc $\alpha=\|X+X^3\|^2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{7}+2\times\dfrac{2}{5}=\frac{184}{105}$.

Deuxième partie

On veut établir, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'une famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ de E_n vérifiant:
$$(C_n):\left\{\begin{array}{c}\forall k\in[[0,n]],\ \deg(P_k)=k \text{ et } P_k \text{ est de coefficient dominant égal à } 1,\\ \forall(i,j)\in[[0,n]]^2,\ i\neq j\Rightarrow(P_i|P_j)=0.\end{array}\right.$$

R 17 *Initialisation: On pose* $P_0=1$.
Hérédité: Supposons que $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ *de* E_n *vérifie* (C_n).
On se place dans l'espace euclidien E_{n+1}.
Soit $(R_0,R_1,\ldots,R_{n+1})$ *de* E_{n+1} *vérifie* (C_{n+1}).
Les familles $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ *et* $(R_0,R_1,\ldots,R_n)$ *vérifie toutes les deux* (C_n) *donc sont égales.*
La famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ *est de degré échelonné donc libre donc* $\dim\left(vect(P_0,P_1,\ldots,P_n)\right)=n+1$ *et* $\dim(E_{n+1})=n+2$ *donc* $vect(P_0,P_1,\ldots,P_n)^{\perp}$ *est de dimension* 1.
Soit Q *un générateur de* $vect(P_0,P_1,\ldots,P_n)^{\perp}$ *et* $c(Q)$ *son coefficient dominant.*
On cherche P_{n+1} *de coefficient dominant* 1 *dans* $vect(P_0,P_1,\ldots,P_n)^{\perp}=vect(Q)$.
Il existe un et un seul polynôme de coefficient dominant 1 *colinéaire à* Q *égal à* $\dfrac{1}{c(Q)}\times Q$ *(ce qui achève la partie unicité)*
De plus, $\deg(Q)=n+1$ *car sinon* $(P_0,P_1,\ldots,P_n,Q)$ *serait une famille orthogonale sans vecteur nul donc libre de* $n+2$ *vecteurs de* $\mathbb{R}_n[X]$ *qui est de dimension* $n+1$.
- *Par hypothèse* $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ *est une famille orthogonale et*
- $\dfrac{1}{c(Q)}\times Q$ *est orthogonal à* $vect(P_0,P_1,\ldots,P_n)$

donc $\left(P_0,P_1,\ldots,P_n,\dfrac{1}{c(Q)}\times Q\right)$ *est une famille orthogonale de* E_{n+1} *vérifiant la condition* (C_{n+1}), *ce qui achève la récurrence.*

Remarque *La famille* $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ *résulte du procédé d'orthogonalisation de Schmidt sans normalisation à partir de la base* $(1,X,X^2,\ldots,X^n)$.

R 18 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$
Supposons que n *est pair. Dans l'espace euclidien* E_n*, on a* $P_n \in vect\left(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\right)^{\perp}$
et $vect\left(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\right) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *donc* $G_n \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *car* n *est pair donc* $P_n \in (G_n)^{\perp} = F_n$
De même, si n *impair alors* $P_n \in G_n$.

R 19 *Les conditions* (C_{n+1}) *donnent*
\- P_{n+1} *est de degré* $n+1$ *et de coefficient dominant* 1.
\- XP_n *est de degré* $n+1$ *et de coefficient dominant* 1.
On en déduit que $\deg\left(P_{n+1} - XP_n\right) \leq n$ *donc* $P_{n+1} - XP_n \in E_n$.
Supposons n *pair. On a* $P_{n+1} \in G_{n+1}$ *et* $P_n \in F_n$ *donc* $P_{n+1} - XP_n$ *est un polynôme impair donc* $P_{n+1} - XP_n \in G_n \subset E_{n-1}$ *car* n *est pair donc* $P_{n+1} - XP_n \in E_{n-1}$.

R 20 *Soit* $Q \in E_{n-2} = vect\left(P_0, \ldots, P_{n-2}\right) \perp P_{n+1}$ *donc* $(P_{n+1}|Q) = 0$.
$(XP_n|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} xP_n(x)\,Q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} P_n(x)\,(xQ(x))\,dx = (P_n|XQ)$ *et* $XQ \in E_{n-1} = vect\left(P_0, \ldots, P_{n-1}\right) \perp P_n$ *donc* $(XP_n|Q) = (P_n|XQ) = 0$ *donc* $(P_{n+1} - XP_n|Q) = (P_{n+1}|Q) - (XP_n|Q) = 0$ *donc*
$P_{n+1} - XP_n$ *est orthogonal à* E_{n-2}.

R 21 *On se place dans l'espace euclidien* E_{n-1}.
On a $P_{n+1} - XP_n \in E_{n-1}$ *et* $P_{n+1} - XP_n \in (E_{n-2})^{\perp} = vect\left(P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}\right)^{\perp}$ *et* $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ *est une base orthogonale de* E_{n-1} *donc* $vect\left(P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}\right)^{\perp} = vect\left(P_{n-1}\right)^{\perp}$
donc il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ *tel que* $P_{n+1} - XP_n = \lambda_n P_{n-1}$.

Troisième partie: Expression des polynômes P_n

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \left(X^2 - 1\right)^n$ et $L_n = A_n^{(n)}$.

R 22 *On a* $\deg(L_n) = \deg(A_n) - n = 2n - n = n$ *et en développant par le binôme,* $A_n = X^{2n} + B_n$ *avec* $\deg(B_n) < 2n$. *On en déduit que* $A_n^{(n)} = (2n) \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1)\,X^n + B_n^{(n)}$ *avec* $\deg(B_n) < 2n$ *donc* $\deg\left(B_n^{(n)}\right) < 2n - n = n$ *donc le coefficient dominant de* $L_n = A_n^{(n)}$ *est* $(2n) \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

R 23 *Posons* $U = (X-1)^n$ *et* $V = (X+1)^n$. *On a* $L_n = A_n^{(n)} = (UV)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} U^{(k)} V^{(n-k)}$.
Or 1 *est racine de* U *de mutiplicité* n *donc* $U^{(k)}(1) = 0$ *si* $k < n$ *et* $U^{(n)} = n!$.
On en déduit que $L_n(1) = \binom{n}{0} U^{(n)}(1) = n! \times 2^n$
De même, $L_n(-1) = \binom{n}{0} V^{(n)}(1) = n! \times (-2)^n$.

R 24 *Soit* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. *On suppose que* $n < m$.
On effectue une IPP avec $u'(x) = A_m^{(m-k)}(x)$ *et* $v(x) = A_n^{(n+k)}(x)$
$\left(A_n^{(n+k)}|A_m^{(m-k)}\right) = \int_{-1}^{1} A_n^{(n+k)}(x)\,A_m^{(m-k)}(x)\,dx = \left[A_n^{(n+k)}(x)\,A_m^{(m-k-1)}(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} A_n^{(n+k+1)}(x)\,A_m^{(m-k-1)}(x)\,dx$
et -1 *et* 1 *sont racines de* A_m *de mutiplicité* m *donc*
$\forall i \leq m-1$, $A_m^{(i)}(1) = A_m^{(i)}(-1) = 0$ *donc si* $m - 1 \geq k \geq 0$ $A_m^{(m-k-1)}(1) = A_m^{(m-k-1)}(-1) = 0$.
On a donc $\left(A_n^{(n+k)}|A_m^{(m-k)}\right) = -\int_{-1}^{1} A_n^{(n+k+1)}(x)\,A_m^{(m-k-1)}(x)\,dx = -\left(A_n^{(n+k+1)}|A_m^{(m-k-1)}\right)$.

R 25 $(L_n|L_m) = \left(A_n^{(n)}|A_m^{(m)}\right) = -\left(A_n^{(n+1)}|A_m^{(m-1)}\right) = \cdots = (-1)^n \left(A_n^{(n+n)}|A_m^{(m-n)}\right) = (-1)^{n+1}\left(A_n^{(2n+1)}|A_m^{(m-(n+1))}\right)$.
Or $\deg(A_n) = 2n$ *donc* $A_n^{(2n+1)} = 0$ *donc* $(L_n|L_m) = 0$.

R 26 *De même,* $(L_n|L_n) = \left(A_n^{(n)}|A_n^{(n)}\right) = -\left(A_n^{(n+1)}|A_n^{(n-1)}\right) = \cdots = (-1)^n \left(A_n^{(2n)}|A_n\right)$
Or $A_n^{(2n)} = (2n)!$ *donc* $(L_n|L_n) = (-1)^n (2n)! \left(1|A_n^{(0)}\right) = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \, dx = (2n)! \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ *donc*
$\|L_n\|^2 = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$.

R 27 *La famille* $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ *vérifie* $\forall i \in [[0,n]]$ $\deg(L_i) = i$ *donc si on pose* $Q_i = \dfrac{1}{c(L_i)} L_i$*, La famille* $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ *vérifie la condition* (C_n)*. La famille* $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *vérifie la condition* (C_n) *et d'après l'unicité vue dans la partie précédente,* $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *donc* $P_n = \dfrac{1}{c(L_n)} L_n$.

Quatrième partie: racines des polynômes L_n

On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$

R 28 $P \in E_{n-1} = vect(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ *et* $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *est orthogonale donc* $(P|P_n) = 0$ *donc* $(P|L_n) = 0$.

R 29 $1 \in E_{n-1}$ *donc* $(1|L_n) = 0$ *donc* $\int_{-1}^1 L_n(x)\, dx = 0$.
Supposons que L_n *n'admette pas de racine dans* $]-1,1[$*. Comme* L_n *est une fonction continue qui ne s'annule pas sur* $]-1,1[$*, la fonction* L_n *ne change pas de signe sur* $]-1,1[$ *(TVI).*
Supposons $\forall x \in]-1,1[$ $L_n(x) > 0$*, ce qui contredit* $\int_{-1}^1 L_n(x)\, dx = 0$ *donc* L_n *admet une de racine dans* $]-1,1[$.

R 30 *Soit* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *les racines de* L_n *appartenant à* $]-1,1[$ *de multiplicité impaire.*
La décomposition en irréductibles de L_n *est de la forme*
$L_n = C \times \prod_{i=1}^k (X-\alpha_i)^{m_i} \times \prod_{i=1}^k (X-\beta_i)^{n_i} \times \prod_{i=1}^k (X-\gamma_i)^{p_i} \times \prod_{i=1}^k P_i^{q_i}$ *avec*
- m_i *impair.*
- $\beta_i \in]-1,1[$ *et* n_i *pair*
- $\gamma_i \notin]-1,1[$
- P_i *polynôme de degré* 2 *qui ne s'annule pas dans* $\mathbb{R}$.

Si $k < n$*, posons* $P = \prod_{i=1}^k (X-\alpha_i) \in E_{n-1}$*. On a donc* $(P|L_n) = \int_{-1}^1 (P \times L_n)(x)\, dx = 0$.
Or $P \times L_n = C \times \prod_{i=1}^k (X-\alpha_i)^{m_i+1} \times \prod_{i=1}^k (X-\beta_i)^{n_i} \times \prod_{i=1}^k (X-\gamma_i)^{p_i} \times \prod_{i=1}^k P_i^{q_i}$ *avec* m_i+1 *pair donc* $P \times L_n$ *est de signe constant sur* $]-1,1[$*, ce qui contredit* $\int_{-1}^1 (P \times L_n)(x)\, dx = 0$ *(idem question précédente).*

R 31 *On applique le théorème de Rolle à* A_n*:*
$A_n(1) = A_n(-1) = 0$ *donc* $\exists \alpha_1 \in]-1,1[\,,\ A_n'(\alpha_1) = 0$.
Soit $k < n$*. Supposons* $A_n^{(k)}$ *admet* k *racines distinctes* $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ *dans l'intervalle* $]-1,1[$.
Les réels -1 *et* 1 *sont racines de* $A_n^{(k)}$ *de multiplicité* $n-k > 0$ *donc, en appliquant le th de Rolle à* $A_n^{(k)}$ *sur les* $k+1$ *intervalles* $[-1,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [x_{k-1},x_k], [x_k,1]$*, on obtient* $k+1$ *racines distinctes de* $A_n^{(k+1)}$.
On en déduit que $P_n = A_n^{(n)}$ *admet* n *racines distinctes dans* $]-1,1[$ *donc* L_n *admet* n *racines distinctes dans* $]-1,1[$