DM 12 pour le 5 janvier 2026

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. On dispose d'un paquet de n cartes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$ selon le protocole suivant :

→ la première carte C_1 est donnée à J_1;

→ la deuxième carte C_2 est distribuée de façon équiprobable entre J_1 et J_2;

→ la troisième carte C_3 est distribuée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3;

→ et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre les joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$.

Les différentes distributions sont effectuées de manières indépendantes.

On suppose l'expérience modélisée sur un espace probabilisé (Ω, P).

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

Pour $1 \leq j \leq i$, on note $A_{i,j}$ l'événement: "la i-ème carte est donnée au joueur j".

Q 1 *Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.*

Pour tout i de $[[1, n]]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte à la fin de la distribution et qui vaut 0 sinon.

Q 2 *Déterminer la loi de B_i. Exprimer la variable aléatoire X_n en fonction des variables aléatoires B_i et en déduire l'espérance de X_n.*

Q 3 *En utilisant les questions précédentes, donner la loi de X_4 (peu de calculs).*

Q 4 *Montrer que pour i et j dans $[[1, n]$] tels que $i < j$, on a :*

$$P\left((B_i = 1) \cap (B_j = 1)\right) = \frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$$

Q 5 *En déduire que $cov\left(B_i, B_j\right) = -\dfrac{(i-1)(n-j+1)}{n^2(n-1)}$.*

Q 6 *Montrer que $V(X_n) = \dfrac{n+1}{12}$.*

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, d désigne un entier naturel tel que $d \geqslant 2$ et x un réel, $x > 0$.

Q 7 *Ecrire sans démonstration l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe C^{n+1}.*
En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ |t| \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow |\ln(1-t) + t| \leq Mt^2$.

Q 8 *Soit $x > 0$. On pose, pour $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $u_d = \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \ln\left(1 - \tfrac{k}{d}\right)$ et $v_d = \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \frac{k}{d}$*

- *Montrer que la suite $(u_d + v_d)_{d\geq 2}$ converge vers 0.*

- *En déduire que la suite (u_d) converge vers $-\dfrac{x^2}{2}$.*

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé (Ω, P) suivant toute la loi uniforme discrète sur $[[1, d]]$.

Soit N_d la variable aléatoire définie sur (Ω, P) par :

$$\forall \omega \in \Omega, N_d(\omega) = \inf\{i \geq 2 \mid U_i(\omega) \in \{U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots, U_{i-1}(\omega)\}\}$$

(N_d est le temps d'attente de la première répétition dans les valeurs de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$).

Q 9 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leqslant n \leqslant d$, on a :*

$$P(N_d > n) = \left(1 - \frac{1}{d}\right)\left(1 - \frac{2}{d}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{n-1}{d}\right)$$

Q 10 *Pour tout $x > 0$, déterminer la limite de $P\left(\frac{N_d}{\sqrt{d}} > x\right)$ lorsque d tend vers l'infini.*

Q 11 *Montrer que $E(N_d) = \sum\limits_{k=0}^{d} P(N_d > k)$.*

Q 12 *Justifier que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{d}\right)^d \mathrm{e}^{-t} dt$ converge et montrer que $E(N_d) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{d}\right)^d \mathrm{e}^{-t} dt$.*

PROBLEME

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur Z

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur 2 de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

- si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
- sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide.

On définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \text{ et } q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q 13 *Que représente la variable aléatoire S_n ?*

Q 14 *Calculer p_0, p_1 et p_2.*

Q 15 *Justifier que, si n est impair, alors on a $p_n = 0$.*

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Q 16 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.*

Q 17 *Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.*

Q 18 *On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :*

$$p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q 19 *Montrer que $R_p \geq 1$.*

Q 20 *Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right).$$

Q 21 *Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1-x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1,1[$.*

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q 22 *Calculer q_1 et q_2.*

Q 23 *Justifier que $R_q \geq 1$.*

Q 24 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[0, n]]$.*

1. *Justifier que les événements $(T = k)$ et $\left(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right)$ sont indépendants.*
2. *Soit A et B les variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans $\{-1,1\}^{n-k}$ par $A = (X_1, \ldots, X_{n-k})$ et $B = (X_{k+1}, \ldots, X_n)$. Justifier que A et B suivent la même loi.*

3. Justifier que $P\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right) = p_{n-k}$.

4. En déduire la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k.$$

Q 25 *En utilisant un produit de Cauchy et la relation ci-dessus, montrer que :*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

Q 26 *En déduire que* $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ *pour tout* $x \in]-1,1[$*, puis calculer le développement en série entière de la fonction* $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ *en précisant son rayon de convergence.*

Q 27 *En déduire une expression de* q_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 28 *En admettant que l'égalité* $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ *est vraie sur* $[-1,1]$*, déterminer la valeur de* $P(T = +\infty)$.

Q 29 *Question abordable après le chapître sur les fonctions génératrices (hors DM12):*
La variable aléatoire T *admet-elle une espérance?*

Correction

EXERCICE 1

R 1 *On a* $X_n(\Omega) = [[0, n-1]]$ *car on peut donner une carte à chacun ou toutes les cartes à* J_1*, ou toute situation intermédiaire.*
Notons $A_{i,j}$ *l'évènement «la i-ème carte est donnée au joueur* j *». Pour* $j \in [[1, i]]$*,* $P(A_{i,j}) = \dfrac{1}{i}$.
L'évènement $(X_n = 0)$ *est réalisé si et seulement si, pour tout* i*, le joueur* i *reçoit la i-ème carte; ainsi :*

$$P(X_n = 0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{i,i}\right) \underset{\text{indép}}{=} \prod_{i=1}^{n} P(A_{i,i}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n!}$$

L'évènement $(X_n = n-1)$ *est réalisé si et seulement si, pour tout* i*, le joueur 1 reçoit la i-ème carte.*
De même que précédemment on obtient alors : $P(X_n = 0) = \frac{1}{n!}$.

R 2 B_i *est une variable qui suit la loi de Bernoulli et* $(B_i = 1) = \bigcap\limits_{k=i}^{n} \overline{A_{k,i}}$*: Le joueur* i *n'a pas été servi à partir de la* $i^{\text{ème}}$ *distribution (il ne peut pas être servi avant). Or* $P\left(\overline{A_{k,i}}\right) = \dfrac{k-1}{k}$ *donc, par indépendance,*

$$P(B_i = 1) = \frac{i-1}{i} \times \frac{i}{i+1} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{i-1}{n}$$

Comme B_i *est une variable de Bernoulli, on a* $E(B_i) = P(B_i = 1) = \frac{i-1}{n}$.
Le nombre de joueurs non servis est $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i$ *donc, par linéarité de l'espérance*
$E(X_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} E(B_i) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (i-1) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} i = \dfrac{n-1}{2}$.

R 3 *D'après la première question, on a :* $P(X_4 = 0) = P(X_4 = 3) = \frac{1}{24}$.
Comme $(X_4 = 0), (X_4 = 1), (X_4 = 2), (X_4 = 3)$ *est un système complet d'évènements, on en déduit que :*

$$P(X_4 = 1) + P(X_4 = 2) = 1 - P(X_4 = 0) - P(X_4 = 3) = \frac{22}{24}$$

Par ailleurs, d'après la deuxième question, on a: $P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) = E(X_4) = \frac{3}{2}$*. En résolvant ce système linéaire de deux équations à deux inconnues on en déduit :* $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{11}{24}$.

R 4 *Réaliser* $(B_i = 1) \cap (B_j = 1)$*, c'est donner les cartes* $C_i, C_{i+1} \ldots, C_{j-1}$ *à quelqu'un d'autre que* J_i*, puis donner les cartes* $C_j, \ldots, C_n$ *ni à* J_i *ni à* J_j *i.e:*

$$(B_i = 1) \cap (B_j = 1) = \left(\bigcap_{k=i}^{j-1} \overline{A_{k,i}}\right) \cap \bigcap_{k=j}^{n} \left(\overline{A_{k,i}} \cap \overline{A_{k,j}}\right)$$

Or $\left(\overline{A_{k,i}} \cap \overline{A_{k,j}}\right) = \overline{(A_{k,i} \cup A_{k,j})}$ *donc* $P\left(\overline{A_{k,i}} \cap \overline{A_{k,j}}\right) = 1 - \dfrac{2}{k} = \dfrac{k-2}{k}$ *d'où, par indépendance*

$$P((B_i = 1) \cap (B_j = 1)) = \left(\prod_{k=i}^{j-1} P\left(\overline{A_{k,i}}\right)\right) \times \prod_{k=j}^{n} P\left(\overline{A_{k,i}} \cap \overline{A_{k,j}}\right) = \prod_{k=i}^{j-1} \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=j}^{n} \frac{k-2}{k}$$

Or $\prod\limits_{k=i}^{j-1} \dfrac{k-1}{k} = \dfrac{i-1}{j-1}$ *et* $\prod\limits_{k=j}^{n} \dfrac{k-2}{k} = \dfrac{j-2}{j} \times \dfrac{j-1}{j+1} \times \cdots \times \dfrac{n-3}{n-1} \times \dfrac{n-2}{n} = \dfrac{(j-2)(j-1)}{(n-1)\,n}$ *donc*

$$P((B_i = 1) \cap (B_j = 1)) = \frac{(j-2)(i-1)}{(n-1)\,n}$$

R 5 *B_i, B_j et $B_i \times B_j$ sont des variable de Bernoulli d'espérance égale au paramètre,*
$cov(B_i, B_j) = E(B_i \times B_j) - E(B_i)E(B_j) = \dfrac{(j-2)(i-1)}{(n-1)n} - \dfrac{i-1}{n} \times \dfrac{j-1}{n} = \dfrac{(i-1)}{n}\dfrac{n(j-2)-(n-1)(j-1)}{n(n-1)}$
donc $cov(B_i, B_j) = \dfrac{(i-1)}{n}\dfrac{-n+j-1}{n(n-1)} = -\dfrac{(i-1)(n-j+1)}{n^2(n-1)}$

R 6 *Comme B_i est une variable aléatoire de BERNOULLI, on a :*

$$V(B_i) = P(B_1 = 1)(1 - P(B_1 = 1)) = \frac{i-1}{n}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{(i-1)(n-i+1)}{n^2}.$$

On a $X_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$ et $V\left(\sum_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(B_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(B_i, B_j)$ donc

$V(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(n-(i-1))}{n^2} - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{(i-1)(n-j+1)}{n^2(n-1)}$

$V(X_n) = \left(\frac{1}{n^2}\left(n\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} k^2\right)\right) - 2\left(\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} \frac{(i-1)(n-j+1)}{n^2(n-1)}\right)$

$V(X_n) = \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} - 2\sum_{j=2}^{n} \frac{(j-2)(j-1)(n-j+1)}{2n^2(n-1)} = \frac{n^2-1}{6n} - \sum_{j=2}^{n} \frac{(j-2)(j-1)(n-j+1)}{2n^2(n-1)}$

Or $\sum_{j=2}^{n} \frac{(j-2)(j-1)(n-j+1)}{n^2(n-1)} = \frac{n^2-1}{6n} - \frac{1}{n^2(n-1)}\sum_{j=1}^{n-1} j(j-1)(n-j) = \frac{1}{n^2(n-1)}\sum_{j=1}^{n-1} j^3 - (n+1)j^2 + nj$

$V(X_n) = \frac{n^2-1}{6n} + \frac{1}{n^2(n-1)}\left(\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 - (n+1)\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n\frac{n(n-1)}{2}\right)$

$V(X_n) = \frac{n^2-1}{6n} + \frac{n(n-1)}{4n} - \frac{(n+1)(2n-1)}{6n} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{12}.$

EXERCICE 2

R 7 *Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. La fonction f est de classe C^2 sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.*

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $|f(x) - (f(0) + f'(0)x)| \leq M_2\dfrac{|x-0|^2}{2!}$ avec $M_2 = \sup\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} |f''(x)|$ (qui existe car f'' est continue).
Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc $|\ln(1+x) - x| \leq Mx^2$ (avec $M = \dfrac{M_2}{2}$).
On en déduit, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t| \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow |\ln(1-t) + t| \leq Mt^2$ (remplacer x par $-t$ dans l'inégalité précédente).

R 8 *Si $k \leq \lfloor x\sqrt{d}\rfloor$ alors $k \leq x\sqrt{d}$ donc $\dfrac{k}{d} \leq \dfrac{x}{\sqrt{d}}$ et $\lim\limits_{d\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{d}} = 0$ donc il existe un rang d_0 à partir duquel $\dfrac{x}{\sqrt{d}} \leq \dfrac{1}{2}$.*
Pour $d \geq d_0$, si $k \leq \lfloor x\sqrt{d}\rfloor$ alors $\dfrac{k}{d} \leq \dfrac{1}{2}$ et on peut applique l'inégalité de la question précédente à $\dfrac{k}{d}$.
$|u_d + v_d| = \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \left|\ln\left(1 - \frac{k}{d}\right) + \dfrac{k}{d}\right| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} M\left(\dfrac{k}{d}\right)^2 = \dfrac{M}{d^2}\sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} k^2 = \dfrac{M}{d^2}\dfrac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6}$ avec $n_0 = \lfloor x\sqrt{d}\rfloor$ donc $n_0 \leq x\sqrt{d}$. On en déduit que $0 \leq \dfrac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6d^2} \leq \dfrac{x\sqrt{d}\left(x\sqrt{d}+1\right)\left(2x\sqrt{d}+1\right)}{6d^2} \sim_{d\to+\infty} \dfrac{2x^2}{\sqrt{d}} \to_{d\to+\infty} 0$.
On a donc bien $\boxed{\lim\limits_{d\to+\infty}(u_d + v_d) = 0}$.

Or $v_d = \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor} \frac{k}{d} = \frac{n_0(n_0+1)}{2d}$ *avec* $\frac{\left(x\sqrt{d}-1\right)\left(\left(x\sqrt{d}-1\right)+1\right)}{d} \leq \frac{n_0(n_0+1)}{d} \leq \frac{x\sqrt{d}\left(x\sqrt{d}+1\right)}{d}$.

Or $\frac{x\sqrt{d}\left(x\sqrt{d}+1\right)}{d} \sim_{d\to+\infty} x^2$ *et* $\frac{\left(x\sqrt{d}-1\right)\left(\left(x\sqrt{d}-1\right)+1\right)}{d} \sim_{d\to+\infty} x^2$ *donc* $\lim_{d\to+\infty} v_d = \frac{x^2}{2}$.

Or $\lim_{d\to+\infty}(u_d+v_d) = 0$ *et* $u_d = (u_d+v_d) - v_d$ *donc* $\boxed{\lim_{d\to+\infty}(u_d+v_d) = -\frac{x^2}{2}}$.

R 9 *Je propose deux solutions*
1: méthode rigoureuse basée sur le dénombrement:
Notons E *l'ensemble des* n *listes* $(u_1,\ldots,u_n)$ *sans répétitions de* $[[1,d]]$.
On a $(N_d > n) = (U_1,\ldots,U_n) \in E$ *donc, c'est-à-dire* $(N_d > n) = \bigcup_{(u_1,\ldots,u_n)\in E} ((U_1 = u_1) \cap \cdots \cap (U_1 = u_n))$.
Par indépendance, $P((U_1 = u_1) \cap \cdots \cap (U_1 = u_n)) = \frac{1}{d^n}$ *et, comme l'union est disjointe et qu'il y a* $d\times(d-1)\times\cdots\times(d-(n-1))$ n *listes* $(u_1,\ldots,u_n)$ *sans répétitions de* $[[1,d]]$, $P(N_d > n) = \frac{d\times(d-1)\times\cdots\times(d-(n-1))}{d^n} = \frac{d-1}{d}\times\frac{d-2}{d}\times\cdots\times\frac{d-(n-1)}{d}$.
2: Méthode ou on admet la valeur de certaines probabilités conditionnelles
On a $(N_d > n)$ *équivaut à* $U_1,\ldots,U_{n-1},U_n$ *sont tous distincts deux à deux: "il n'y a pas de répétition avant l'instant* n*".*
Soit E_k *l'événement: "* $U_1,\ldots,U_{k-1},U_k$ *sont distincts".*
On a $(N_d > n) = E_2 \cap E_3 \cap \cdots \cap E_n$.
On a donc (formule des probabilités composées): $P(N_d > n) = P(E_2) \times P_{E_2}(E_3) \times \cdots \times P_{E_{n-1}}(E_n)$.
Or $P(E_2) = \frac{d-1}{d}$ *et* $P_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{d-k}{d}$*: probabilité que* U_k *n'appartienne pas l'ensemble* $\{U_1,\ldots,U_{k-1}\}$.
(c'est ce point qui est admis: on ne voit pas bien comment l'indépendance de $U_1,\ldots,U_n$ *joue).*
On a donc $P(N_d > n) = \frac{d-1}{d}\times\frac{d-2}{d}\times\cdots\times\frac{d-(n-1)}{d} = \left(1-\frac{1}{d}\right)\left(1-\frac{2}{d}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{d}\right)$.
$(*)$*: on peut aussi raisonner sur les résultats de* $U_1,\ldots,U_n$*:*

R 10 *Soit* $x > 0$. *On choisit l'entier* d *assez grand de façon à avoir* $x\sqrt{d} \leqslant d$. *Les questions précédentes donnent:*

$$\ln\left(P\left(N_d > x\sqrt{d}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\lfloor x\sqrt{d}\rfloor - 1} \ln\left(1-\frac{k}{d}\right) \underset{d\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{x^2}{2}$$

Donc, par continuité de l'exponentielle: $\lim_{d\to+\infty} P\left(\frac{N_d}{\sqrt{d}} > x\right) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

R 11 *On a* $N_d(\Omega) = [[2, d+1]]$ *car* $U_1,\ldots,U_{d+1}$ *ne peuvent pas être deux à deux distinctes.*
Fait en exercice (cas des VA finies) et figure dans le cours (cas des VA discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$*).*

R 12 *On a* $\left(1+\frac{t}{d}\right)^d \mathrm{e}^{-t} = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k}\frac{t^k}{d^k}\mathrm{e}^{-t}$ *et* $\forall k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^k\mathrm{e}^{-t}$ *car* $t^k\mathrm{e}^{-t} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ *donc* $\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}dt$ *est convergente.*
On montre par récurrence sur $k \geqslant 0$ *que :* $\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}dt = k!$ *(fait en cours).*
On a donc $\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{d}\right)^d\mathrm{e}^{-t}dt = \sum_{k=0}^{d}\frac{\binom{d}{k}}{d^k}\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}dt = \sum_{k=0}^{d}\frac{\binom{d}{k}k!}{d^k}$.
Or si $k \geq 1$, $P(N_d > k) = \frac{d-1}{d}\times\frac{d-2}{d}\times\cdots\times\frac{d-(k-1)}{d} = \frac{d!}{(d-k)!\times d^k}$ *et cette relation est aussi valabble pour* $k = 0$ *:*

$P\left(N_d > k\right) = 1 = \dfrac{d!}{d! \times d^0}$.

On a donc $\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{d}\right)^d \mathrm{e}^{-t}dt = \sum\limits_{k=0}^{d} P\left(N_d > k\right) = E\left(N_d\right)$.

PROBLEME:

Partie I - Calcul de p_n

R 13 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Chaque variable* X_k *modélise le pas de l'instant* k, *donc* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ *modélise la positition du pion à l'instant* n.
Comme $S_0 = 0$, S_0 *modélise aussi la position du pion à l'instant 0.*

R 14 $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$.
Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{\pm 1\}$, *on a* $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$.
Enfin, $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$ *et* $(X_1 + X_2 = 0) = (X_1 = 1 \cap X_2 = -1) \cup (X_1 = -1 \cap X_2 = 1)$ *donc* $p_2 \underset{union\ disjointe}{=} P(X_1 = 1 \cap X_2 = -1) + P(X_2 = -1 \cap X_1 = 1) \underset{indép}{=} P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1)$
donc $p_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

R 15 *On a* $S_n(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm 1\}} = 0$ *si et seulement si le nombre de* $k \in [[1, n]]$ *tels que* $X_k(\omega) = 1$ *est égal au nombre de* $k \in [[1, n]]$ *tels que* $X_k(\omega) = -1$, *ce qui n'est pas possible si* n *est impair, donc si* n *est impair.*$p_n = P(S_n = 0) = 0$.

R 16 *On a* $X_k(\omega) = 1 \Rightarrow Y_k(\omega) = 1$ *et* $X_k(\omega) = -1 \Rightarrow Y_k(\omega) = 0$ *donc* $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$, *donc* Y_k *suit une loi de Bernoulli. De plus,* $P(Y_k = 1) = P\left(\frac{X_k+1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$, *donc* Y_k *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{2}$.

R 17 • *Les variables* $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *suivent toutes une loi de Bernoulli de même paramètre* $\frac{1}{2}$ *et sont indépendantes (vérification immédiate à partir de l'indépendance des* X_i*), donc, pour tout* $n > 0$, $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ *suit une loi binomiale de paramètres* n *et* $\frac{1}{2}$.
Par suite, $Z_n(\Omega) = [[0, n]]$ *et, pour tout* $k \in [[0, n]]$,

$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

• *De plus,*

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$

donc $S_n = 2Z_n - n$.

R 18 *Pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, *donc, d'après la question précédente,*

$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$

Comme $\binom{0}{0}\frac{1}{4^0} = 1 = p_0$, *ce résultat est encore valable pour* $m = 0$.*On suppose que* $n = 2m$ *avec* $m \in \mathbb{N}$.

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

R 19 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leq 1$, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} 1x^n$, c'est-à-dire $R_p \geq 1$.*

R 20 *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right) &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)\right)\\
&= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k-1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}(2k)}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{2m}k}{2^m\prod_{k=1}^{m}k}\\
&= \frac{1}{m!2^m}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = p_{2m}
\end{aligned}$$

R 21 *D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n.$$

Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$, on a

$$(1-x^2)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)(-x^2)^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a, pour tout $x \in]-1,1[$ (on a $R_p \geq 1$),

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n &= p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{p_{2n+1}}_{=0}x^{2n+1}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}p_{2n}x^{2n}.
\end{aligned}$$

D'où, pour $\alpha = -1/2$, comme $p_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)$ pour tout $n \geq 1$ d'après la question précédente, on a $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

R 22 • *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T = n \Rightarrow S_n = 0$, donc $(T = n) \subset (S_n = 0)$, donc $P(T = n) \leq P(S_n = 0)$.
Or, pour tout n impair, $P(S_n = 0) = 0$, donc, pour tout n impair, $q_n = P(T = n) = 0$. En particulier, pour $n = 1$, $q_1 = 0$.*
• *$S_1 = 0$ est impossible, donc, par définition de T, on a $T \geq 2$ et $T = 2 \Leftrightarrow S_2 = 0$, donc $q_2 = P(T = 2) = P(S_2 = 0) = p_2 = \frac{1}{2}$.*

R 23 *Découle comme précédemment de* $|q_n| = P(T=n) \leq 1$.

R 24 *Relation* $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$.

1. *Première réponse (vague)* $(T=k)$ *ne dépend que des variables aléatoires* $X_1,\dots,X_k$ *et d'après le lemme des coalitions,* $f(X_1,\dots,X_k)$ *et* $g(X_{k+1},\dots,X_n)$ *donc* $(T=k)$ *et* $\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right)$ *sont indépendants. Problème: qu'est-ce que* f *?*
   Deuxième réponse: Amélioration de ce qui précède:
   Si $f : (x_1,\dots,x_k) \mapsto (x_1, x_1+x_2, x_1+\cdots+x_{k-1}, x_1+\cdots+x_k)$ *et*
   $U_k = f(X_1,\dots,X_k) = (X_1, X_1+X_2, X_1+\cdots+X_{k-1}, X_1+\cdots+X_k)$
   $(T=k) = \left(U_k \in \underbrace{\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \cdots \times \mathbb{Z}^*}_{k-1 \text{ fois}} \times \{0\}\right)$.

2. $X_1,\dots,X_{n-k}$ *sont indépendantes ,* $X_{k+1},\dots,X_n$ *sont indépendantes et* $X_i \sim X_{k+i}$ *donc* $P(A=(x_1,\dots,x_{n-k})) = \prod\limits_{k=1}^{n-k} P(X_i = x_i) = \prod\limits_{k=1}^{n-k} P(X_{k+i} = x_i) = P(B=(x_1,\dots,x_{n-k}))$ *donc* A *et* B *suivent la même loi.*

3. *On a* $\sum\limits_{i=1}^{n-k} X_i = f(A)$ *et* $\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = f(B)$ *avec* $f : (x_1,\dots,x_{n-k}) \mapsto x_1+\cdots+x_{n-k}$.
   Or $A \sim B$ *donc* $f(A) \sim f(B)$ *donc* $P\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right) = P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0\right) = p_{n-k}$.

4. *On a* $S_n = 0 \Rightarrow T \leq n$ *donc*
   $(S_n=0) = (S_n=0) \cap (T \leq n) = (S_n=0) \cap \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} (T=k)\right) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} ((S_n=0) \cap (T=k))$.
   Or $T=k \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} X_i = 0$ *donc* $S_n = 0$ *et* $(T=k) \Rightarrow \sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = 0$ *donc*
   $(S_n=0) \cap (T=k) \subset \left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right) \cap (T=k)$.
   L'inclusion réciproque est immédiate donc $(S_n=0) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} \left(\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right) \cap (T=k)\right)$ *(union disjointe) donc*
   $p_n = P(S_n=0) = \sum\limits_{k=0}^{n} P\left(\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right) \cap (T=k)\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} P\left(\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i = 0\right) \times P(T=k)$ *(indépendance précédente)*
   donc $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k$ *d'après la question précédente donc* $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$ *(changement d'indice. J'aurais pu inverser les rôles de* k *et* $n-k$ *dès le départ).*

R 25 f *et* g *sont deux fonctions développables en série entière au moins sur* $]-1,1[$, *donc, par produit de Cauchy,* fg *est développable en série entière au moins sur* $]-1,1[$ *et, pour tout* $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{n-k}\right) x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\ &= p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la question précédente)} \end{aligned}$$

donc

$$f(x)g(x) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = -1 + p_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x).$$

R 26 • *Comme, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 21), la relation obtenue à la question précédente devient :*

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-1/2} g(x) = (1-x^2)^{-1/2} - 1,$$

donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$, on a bien, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

• *Pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) x^n,$$

donc, pour $\alpha = 1/2$, on a , pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$

donc

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$

où le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

R 27 *Pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on a :*

$$q_0 = 0, \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*, q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, q_{2n+1} = 0).$$

R 28 • *Comme $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a*

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

Or $g(1) = 1 - \sqrt{1-1^2}$ (résultat admis) donc $P(T = +\infty) = 0$.

R 29 *Pour $x \in]-1,1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,*

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

On a $\lim_{x\to 1^-} g'(x) = +\infty$.
Si g était dérivable en 1, g serait continue en 0 et comme $\lim_{x\to 1^-} g'(x) = +\infty$, cela contredirait le fait que g est dérivable en 1 (th limite de la dérivée) donc T n'admet pas d'espérance.