PSI DS 5 (le mercredi 7 janvier 2026)

durée 2 h - **calculatrices interdites**

Les étudiants sont autorisés à composer 3h.

En cas de dépassement des 2h, indiquer l'heure de fin de DS sur la copie.

Attention 1 *Dans tout le sujet, on suppose donné un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*. Toutes les variables aléatoires discrètes introduites sont définies sur cet espace probabilisé.*

COMMENTAIRES GENERAUX:

- Mentionner l'indépendance à chaque fois.
- Mentionner union disjointe à chaque fois.
- Utiliser les théorèmes de comparaison pour l'espérance (inutile de revenir aux séries dans ce cas).
- Théorème sur l'espérance du produit de deux VA indépendantes!
- Reconnaître une loi binômiale sans refaire le cours (Q1 12 14) et rappeler indépendancce et même paramètre dans les schéma de Bernoulli
- Ne pas redémontrer le cours à mloins que ce ne soit la question.
- Pour les calculs d'espérance, précisez si $X \geq 0$, ce qui justifie une seule étape de calcul
- Non indépendance: trouver le cas ou $P(X = i, Y = j) = 0$ est le plus simple!

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$.

Q 1 *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Donner la valeur de* $P(X > n)$ *(on demande de retrouver le résultat à partir de la loi de* X*).*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ un famille de variable aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.
On pose $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ et $Z = \max(X_1, \ldots, X_k)$.

Q 2 *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Déterminer* $P(Y > n)$*.*

Q 3 *En déduire que* Y *est d'espérance finie et préciser* $E(Y)$*.*

Q 4 *Déterminer la loi de* Y *(et la reconnaître). En déduire la variance de* Y*.*

Q 5 *Déterminer la loi* Z*.*

COMMENTAIRES:

- Pour calculer $\sum\limits_{i=p}^{+\infty} p^i$, il est plus simple de se ramener par factorisation à $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} p^i$ que de soustraire la somme partielle (Q1)

Exercice 2

Q 6 *On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.*

a *Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$.*

b *Montrez que $\dfrac{1}{E(X)} \leq E\left(\frac{1}{X}\right)$.*

Q 7 *Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.*

a *Montrez que $\dfrac{1}{X}$ est d'espérance finie.*

b *Justifier que $\sqrt{X}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ ont une espérance finie.*

c *En déduire que $\dfrac{1}{E(X)} \leq E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.*

Q 8 *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, d'espérance finie, de même loi et vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{Y}{X}$ est d'espérance finie et que $E\left(\dfrac{Y}{X}\right) \geq 1$.*

COMMENTAIRES:

- Pour écrire Cauchy-Schwarz correctement, commencer par l'écrire avec un produit scalaire et remplacer $(u|v)$ par $E(X \times Y)$.

Exercice 3:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une famile variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice $M(\omega) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1^2(\omega) & X_1(\omega) X_2(\omega) & \cdots & X_1(\omega) X_n(\omega) \\ X_2(\omega) X_1(\omega) & X_2^2(\omega) & \cdots & X_2(\omega) X_n(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_n(\omega) X_1(\omega) & X_n(\omega) X_2(\omega) & \cdots & X_n^2(\omega) \end{pmatrix}.$$

Q 9 *Justifier que le rang de M appartient à $\{0,1\}$.*

Q 10 *Déterminer la loi de $rg(M)$.*

Q 11 *Déterminer la loi de $tr(M)$.*

COMMENTAIRES:

- Voir corrigé pour une étude claire et simple du rang
- $Xi^2 = X_i$ pour un loi de Bernoulli!

Exercice 4:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère une urne contenant n boules indicernables numérotées de 1 à n.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue k tirages avec remise dans l'urne. Pour $i \in [[1, n]]$, soit X_i le nombre d'obtention de la boule numéroté i.

Q 12 *Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.*

Q 13 *On suppose que $i \neq j$. Justifier que X_i et X_j ne sont pas indépendantes.*

Q 14 *Déterminer la loi de $X_i + X_j$.*

Q 15 *Donner la variance de $X_i + X_j$ et en déduire la covariance du couple (X_i, X_j).*

COMMENTAIRES:

- Q13:Voir corrigé pour rédaction claire
- $X_i + X_j$ est le nombre de fois qu'on tire une des deux boules i ou j.

Exercice 5

Soit $\alpha \in]0;1$ et $\lambda > 0$. On définit un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = \mathfrak{i}, Y = \mathfrak{j}) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i \alpha^j (1-\alpha)^{\mathfrak{i}-\mathfrak{j}}}{\mathfrak{j}!(\mathfrak{i}-\mathfrak{j})!} \text{ si } 0 \leqslant \mathfrak{j} \leqslant \mathfrak{i} \\ \mathbb{P}(X = \mathfrak{i}, Y = \mathfrak{j}) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On pose $Z = X - Y$.

Q 16 *Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.*

Q 17 *Montrer que Y suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.*

Q 18 *Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*

Q 19 *Déterminer la loi de Z.*

Q 20 Pour$(\mathfrak{j}, \mathrm{k}) \in \mathbb{N}^2$, *calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = \mathfrak{j})$.*

Q 21 *Que peut-on en déduire?*

COMMENTAIRES:

- $(Z = k, Y = \mathfrak{j}) \neq (X = k + j)$. Une seule inclusion!!

CORRECTION DU DS 5

Exercice 1

(On pose $q = 1 - p$).

R 1 *Alors on a* $P(X_i > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X_i = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} = pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = pq^n = q^n$.

R 2 *On a* $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.. $P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \cdots \cap (X_k > n))$ *donc* $P(Y > n) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i > n)$ *car* $(X_1, \cdots, X_k)$ *est une famille de VA indépendantes. On a donc* $P(Y > n) = \prod_{i=1}^{k} q^n = q^{nk}$. *(le calcul est valable pour* $n = 0$*).*

R 3 *On a* $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ *donc sous réserve de sommabilité,* $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_i > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{nk} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^k\right)^n = \dfrac{1}{1-q^k}$. *(La SATP converge donc* Y *est d'espérance finie).*

R 4 *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $(Y = n) = (Y \geq n) \backslash (Y > n) = (Y > n-1) \backslash (Y > n)$ *et* $(Y > n) \subset (Y > n-1)$ *donc* $P(Y = n) = q^{(n-1)k} - q^{nk} = q^{(n-1)k} \times \left(1 - q^k\right) = p' \left(1 - (p')^{n-1}\right)$ *avec* $p' = 1 - q^k$*.donc* $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p')$.
(on retrouve que $E(Y) = \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{1-q^k}$*) et on a* $V(Y) = \dfrac{1-p'}{(p')^2} = \dfrac{q^k}{(1-q^k)^2}$.

R 5 *On a* $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $P(Y \leq n) = P((X_1 \leq n) \cap \cdots \cap (X_k \leq n))$ *donc* $P(Z \leq n) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i \leq n)$ *car* $(X_1, \cdots, X_k)$ *est une famille de VA indépendantes. On a donc* $P(Z \leq n) = \prod_{i=1}^{k} (1 - q^n) = (1 - q^n)^k$. *Or* $(Z = n) = (Z \leq n) \backslash (Z \leq n-1)$ *et* $(Z \leq n-1) \subset (Z \leq n)$ *donc* $P(Z = n) = (1 - q^n)^k - (1 - q^{n-1})^k$.

Exercice 2.

R 6 *Cas d'une loi géométrique*

a *Sous réserve de sommabilité d'une famille positive, d'après la formule du transfert,* $E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} pq^{n-1}$. *Or, si* $|t| < 1$, $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n}$ *donc* $E\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p}{q} \ln(1-q) = \dfrac{-p\ln(p)}{1-p}$.

b *On a donc* $E(X) E\left(\frac{1}{X}\right) = \dfrac{\ln(p)}{p-1}$. *Or si* $u > -1$ *alors* $\ln(1+u) \leq u$ *donc si* $x > 0$ *alors* $\ln(x) \leq x - 1$ *et donc, comme* $p < 1$ *donc* $p - 1 > 0$, $\dfrac{\ln(p)}{p-1} \geq 1$ *donc* $E(X) E\left(\frac{1}{X}\right) \geq 1$ *donc* $\dfrac{1}{E(X)} \leq E\left(\frac{1}{X}\right)$.

R 7 *Cas général*

a *Posons* $Y = \dfrac{1}{X}$. *On a* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *donc* $0 < Y \leq 1$. *Comme toute variable aléatoire bornée* Y *est d'espérance finie.*

b *On sait que si* Z^2 *est d'espérance finie alors* Z *est d'espérance finie.Or*

- X *est d'espérance finie donc* $\sqrt{X}$ *est d'espérance finie*
- $\dfrac{1}{X}$ *est d'espérance finie donc* $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ *est d'espérance finie.*

R 8 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que si* X^2 *et* Y^2 *ont une espérance finie, alors* XY *aussi et* $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.

Les carrés des variables aléatoires $\sqrt{X}$ *et* $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ *ont une espérance finie donc* $1 = E(1)^2 = E\left(\sqrt{X} \times \dfrac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 \leq E(X)E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 3

R 9 *On a* $C_i = X_i \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ *donc les* n *colonnes sont colinéaires à* $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ *donc* $rg(M) \leq 1$.

R 10 *On a* $rg(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0$.
Si $M = 0$ *alors* $\forall i \in [[1, n]]\,,\ X_i^2 = 0$ *donc* $X_i = 0$ *et la réciproque est vraie donc* $(rg(M) = 0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (X_i = 0)$ *donc par indépendance,*
$P((rg(M) = 0)) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i = 0) = p^n$ *et* $P((rg(M) = 1)) = 1 - P((rg(M) = 0)) = 1 - p^n$.

R 11 *On a* $tr(M) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ *car* $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$. *Or* $X_1, \ldots, X_n$ *sont indépendantes et suivent une même loi de Bernoulli de même paramètre donc* $tr(M)$ *suit une loi binômiale* $B(n, p)$.

Exercice 4

R 12 X_i *est le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de* k *épreuves avec une probabilité* $\dfrac{1}{n}$ *de succès donc* X_i *suit une loi binômiale* $B\left(k, \dfrac{1}{n}\right)$.
On a donc $E(X_i) = k \times \dfrac{1}{n}$ *et* $V(X_i) = k \times \dfrac{1}{n} \times \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

On suppose que $i \neq j$.

R 13 *Il y a* k *numéros tirés en tout donc* $(X_i = k) \cap (X_j = k) = \emptyset$ *donc* $P((X_i = k) \cap (X_j = k)) = 0$ *et* $P((X_i = k)) \times P((X_j = k)) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{2p} \neq 0$ *donc* X_i *et* X_j *ne sont pas indépendantes.*

R 14 X_i *le nombre d'obtention d'une boule numéroté* i*.ou* j.
A chaque tirage, il y a une probabilité $\dfrac{2}{n}$ *de tirer la boule* i *ou* j *et les tirages sont indépendants donc* $X_i + X_j$ *suit une loi binômiale* $B\left(k, \dfrac{2}{n}\right)$.

R 15 *On a donc* $V(X_i+X_j) = k \times \frac{2}{n} \times \left(1-\frac{2}{n}\right)$.
Or $V(X_i+X_j) = V(X_i)+V(X_j)+2Cov(X_i,X_j) = 2k \times \frac{1}{n} \times \left(1-\frac{1}{n}\right) + 2Cov(X_i,X_j)$.
On en déduit que $Cov(X_i,X_j) = \frac{1}{2}\left(k \times \frac{2}{n} \times \left(1-\frac{2}{n}\right) - 2k \times \frac{1}{n} \times \left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{k}{n^2}$.

Exercice 5

R 16 *Soit* $\mathfrak{i} \in \mathbb{N}$. *La formule des probabilités totales avec le SCE* $((Y=j))_{j\in\mathbb{N}}$ *donne*
$\mathbb{P}(X=\mathfrak{i}) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=\mathfrak{i})\cap(Y=\mathfrak{j})) = \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}((X=\mathfrak{i})\cap(Y=\mathfrak{j})) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}(\alpha+1-\alpha)^i = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ *par le binôme de Newton donc* X *suit la loi de Poisson de paramètre* λ.

R 17 *De même, on a aussi*
$\mathbb{P}(Y=\mathfrak{j}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X=\mathfrak{i})\cap(Y=\mathfrak{j})) = \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}((X=\mathfrak{i})\cap(Y=\mathfrak{j})) = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!}\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{\lambda^{i-j}(1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!} = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!}$
en posant $k=\mathfrak{i}-\mathfrak{j}$.
Ainsi, $\mathbb{P}(Y=\mathfrak{j}) = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!}e^{\lambda(1-\alpha)} = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ *donc* Y *suit la loi de Poisson de paramètre* $\alpha\lambda$.

R 18 *Par hypothèse,* $\mathbb{P}(X=0,Y=1)=0$ *alors que* $\mathbb{P}(X=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} > 0$ *et* $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^0}{0!} > 0$ *donc* $\mathbb{P}(X=1,Y=0) \neq \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0)$. *Ainsi,* X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*

R 19 *On a* $Z(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ *et, pour* $k \in \mathbb{Z}$, $(Z=k) = \bigcup_{j=0}^{+\infty}(X=k+\mathfrak{j})\cap(Y=\mathfrak{j})$ *(union disjointe) donc* $\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}((X=k+\mathfrak{j})\cap(Y=\mathfrak{j}))$.
- Si $k<0$, *on a* $\mathbb{P}(Z=k)=0$ *car* $\forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k+j, Y=j)=0$.
- Si $k \geqslant 0$, *on a* $\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}\alpha^j(1-\alpha)^k}{j!k!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!} \times \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j\alpha^j}{j!}$ *et on reconnait une série exponentielle qui donne* $\mathbb{P}(Z=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k(1-\alpha)^k e^{\lambda\alpha}}{k!} = \frac{e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k}{k!}$.
Ainsi, Z *suit (presque sûrement* $(*)$*) loi de Poisson de paramètre* $\lambda(1-\alpha)$
$(*)$ *: l'énoncé n'entraîne pas que* $(X<Y)$ *est vide mais que* $(X<Y)$ *est négligeable: On a donc* $P(Z\in\mathbb{N})=1$ *sans que nécessairement* $Z(\Omega)=\mathbb{N}$.

R 20 *Pour* $(j,k)\in\mathbb{N}^2$, *comme* $\mathbb{P}(Z=k)>0$, *on a par définition* $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y=j) = \frac{\mathbb{P}((Z=k)\cap(Y=j))}{\mathbb{P}(Z=k)}$.
Or $(Z=k)\cap(Y=j) = (X=k+j)\cap(Y=j)$ *car* $X=Y+Z$ *donc*
$\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y=j) = \frac{\mathbb{P}\left(X=k+j\right)\cap(Y=j)}{\mathbb{P}(Z=k)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}\alpha^j(1-\alpha)^k k!}{j!k!e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k} = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ *d'après la question précédente.*
La loi de Y *sachant* $(Z=k)$ *est une loi de Poisson de parmètre* $\alpha\lambda$.

R 21 *En utilisant la loi de* Y *déjà obtenue,* $\forall(\mathfrak{j},k)\in\mathbb{N}^2, \mathbb{P}_{(Z-k)}(Y=j) = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!} = \mathbb{P}(Y=\mathfrak{j})$ *soit* $\frac{\mathbb{P}((Z=k)\cap(Y=j))}{\mathbb{P}(Z=k)} = \mathbb{P}(Y=j)$ *ce qui entraîne* $\mathbb{P}((Z=k)\cap(Y=j)) = \mathbb{P}(Z=k)\times\mathbb{P}(Y=j)$.*Les variables* Y *et* Z *sont donc indépendantes.*

Remarque *Le cas $k < 0$ donne 0 des deux côtés de l'égalité précédente donc cette égalité est aussi vraie pour $k < 0$ mais je pense qu'on peut se dispenser de cette remarque car on a précisé qu'on travaillait à un ensemble négligeable près pour la variable Z.*

Correction DS 5 PSI

- Les solutions devront être rédigés avec **une encre foncée et** présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter ultérieurement).
- *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction.*
- *Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

  Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément **le numéro de la question utilisée.**