DM 13 POUR LE 19 JANVIER 2025
3 exercices

EXERCICE 1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout évènement A on note $P_A(\cdot)$ la probabilité conditionnelle sachant A.

Soit q, r deux réels de $]0,1[$. Deux joueurs jouent chacun avec une pièce qui peut faire Pile ou Face Le joueur G joue avec une pièce avec laquelle la probabilité de faire Pile est $1-q$; le joueur R joue avec une pièce avec laquelle la probabilité de faire Pile est $1-r$. Ils lancent simultanément chacun leur pièce (de façon indépendante), et répètent l'expérience (de façon indépendante).

On note T_G (respectivement T_R) la variable aléatoire égale au rang du premier lancer où G (respectivement R) fait Pile. On admet que T_G et T_R sont indépendantes.

Q1. (a) Préciser les lois de T_G et T_R.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $P(T_R > n)$.

(c) Calculer la probabilité suivante : $p = P(T_G < T_R)$.

Vérifier que si $r = q$, alors $p = \dfrac{q}{1+q}$.

Indication : on pourra utiliser le système complet d'évènements $(T_G = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Q2. (a) Déterminer la loi conditionnelle sachant $(T_G < T_R)$ de T_G.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $P_{(T_G<T_R)}(T_G > k) = (qr)^k$.

On suppose dans toute la suite que $r = q$. On note T la variable aléatoire égale au rang du premier lancer des deux pièces où apparaît au moins un Pile parmi les deux pièces.

Q3. (a) Que valent $P(T_G > T_R)$ et $P(T_G \neq T_R)$?

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $P_{(T_G>T_R)}(T_R > k)$.

(b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P_{(T_G \neq T_R)}(T > k) = P_{(T_G<T_R)}(T_G > k)$.

Montrer que la loi conditionnelle sachant $(T_G \neq T_R)$ de T est égale à la loi conditionnelle sachant $(T_G < T_R)$ de T_G.

Pour tout évènement A, on note $\mathbf{1}_A$ sa variable aléatoire indicatrice c'est-à-dire la variable de BERNOULLI définie par : $\forall \omega \in \omega,\ \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \ (i.e. \text{ si } A \text{ est réalisé}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit la variable aléatoire suivante : $J = \mathbf{1}_{(T_G<T_R)} + 2 \times \mathbf{1}_{(T_G>T_R)}$.

Q4. Pour tout $k \in J(\Omega)$, exprimer l'évènement $(J = k)$, à l'aide de T_G et T_R.

Q5. Donner la loi conditionnelle sachant $(T_G \neq T_R)$ de J.

Q6. Les variables aléatoires T et J sont-elles indépendantes pour la probabilité $P_{(T_G \neq T_R)}$?

EXERCICE 2

On fixe un entier $n \geqslant 2$. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et une suite de variables aléatoires $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui suivent chacune la loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$. On suppose que les variables aléatoires $X_0, U_0, \dots, U_m, \dots$ sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qu'elles sont mutuellement indépendantes.

On définit par récurrence la suite de variables aléatoires $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in \Omega,\ X_{m+1}(\omega) = \begin{cases} X_m(\omega) - 1 & \text{si } U_m(\omega) < X_m(\omega) \\ X_m(\omega) + 1 & \text{si } U_m(\omega) \geqslant X_m(\omega) \end{cases}$$

Q1. Pour tout $m \geqslant 0$, comparer les ensembles $X_m(\Omega)$ et $[\![0, n]\!]$.

Q2. Montrer que, pour tout $m \geqslant 0$, les variables aléatoires X_m et U_m sont indépendantes.

Q3. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X_m=j)}(X_{m+1} = i)$.

Q4. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$P(X_{m+1} = i) = \frac{n-i+1}{n} P(X_m = i-1) + \frac{i+1}{n} P(X_m = i+1).$$

Q5. (a) Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $E(X_{m+1}) = \dfrac{(n-2)}{n} E(X_m) + 1$.

(b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{m\to+\infty} E(X_m)$.

Q6. On note $Y_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ \vdots \\ P(X_m = n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Montrer l'existence d'un réel K qui ne dépend pas de m tel que : $\forall m \in \mathbb{N},\ Y_{m+1} = MA_nY_m$.

Q7. **Dans cette question seulement**, on suppose que X_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

Montrer que toutes les variables aléatoires X_m suivent cette même loi.
En déduire une valeur propre de A_n.

Q8. Soit f l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = nXP + (1 - X^2)P'$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer la matrice de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

(b) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_j = (1 - X)^{n-j}(1 + X)^j$. Calculer $f(P_j)$.

(c) En déduire que la matrice A_n est diagonalisable.

(d) La valeur de Y_0 étant supposée connue, comment pourrait-on faire pour trouver la loi de X_m pour tout m entier naturel non nul
(*on expliquera juste la démarche sans faire de calcul*).

EXERCICE 3

Toutes les variables aléatoires réelles considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour toute variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X sa fonction génératrice.

Soit $p \in]0,1[$; on note $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes qui suivent toutes la loi de BERNOULLI de paramètre p. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_k et telle que $P(N=k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On définit les variables aléatoires $S_0 = 0$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $S(\omega) = S_{N(\omega)}$.
On admet que S ainsi définie est une variable aléatoire.

Q1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de S_n.
Déterminer la loi conditionnelle sachant $(N=n)$ de la variable S.

(b) Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k\in\mathbb{N}} t^k P(S=k|N=n)$.

(c) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $G_S(t) = G_N(pt+q)$.
Indication : on pourra utiliser le théorème de transfert pour le couple (N,S).

(d) Expliquer sans calcul pourquoi, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $G_{N-S}(t) = G_N(qt+p)$.

On suppose désormais que S et $N-S$ sont indépendantes et que N est d'espérance finie.
On pose pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \ln(G_N(1-t))$.

Q2. (a) Que vaut $f(0)$? Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $f(t) = f(pt) + f(qt)$.
Indication : on pensera à utiliser les résultats des questions Q2c et Q1d.

(b) établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $f(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(p^k q^{n-k} t)$.

Q3. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer l'existence de $f'(0)$ et en donner une expression en fonction de N.

(b) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in [0,\alpha]$, $|f(x) - f'(0)x| \leqslant \varepsilon x$.

(c) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ p^k q^{n-k} \leqslant \alpha.$$

Q4. En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $f(t) = f'(0)t$.
On admet que cela reste vrai pour $t \in]1,2]$.

Q5. Montrer que N suit une loi de POISSON.

FIN du DEVOIR